Estudios de Economía Aplicada
Nº 10, 1998. Págs. 71-88

El método de subasta como complemento al PERT clásico

GARCÍA PÉREZ, J.
Universidad de Almería

Esta versión incluye todas las correcciones sugeridas por el evaluador, las cuales nos han parecido oportunas y por las que le quedamos muy agradecidos.

RESUMEN

Es conocido que el método del PERT clásico usa una subfamilia de betas para todos los casos, debido a la imposibilidad de estimar cuatro parámetros a partir de los tres valores aportados por el experto. Imponiendo una restricción a la familia global de betas de primera especie (que el recorrido de la variable es seis veces la desviación típica), se consigue asignar en cada caso, la beta más apropiada de entre esa subfamilia de betas, con el objetivo básico de estimar una media.

La solución aquí planteada pretende eludir esta restricción, y se orienta hacia la búsqueda de una cuarta estimación que reúna dos condiciones: debe ser suceptible de una interpretación intuitiva, con el fin de conseguir una respuesta fiable, y ser fácilmente incorporable al modelo. Esto se consigue con el método de subasta que proporciona la media que el método del PERT clásico busca como objetivo.

ABSTRACT

This paper presents a solution to the situation posed in the aplication of the classical PERT, which uses a subfamily of Betas for all problems. This is due to the impossibility of estimating four parameters on the basis of the three estimates made by the expert; thus, when a fourth condition is imposed, the fact is that the possible choices are restricted to a subfamily.

Our solution is intended to avoid this restriction and is oriented towards finding a fourth question that fulfils two conditions: it must be susceptible to intuitive interpretation (in order to obtain a reliable response) and be easily incorporated into the model.

PERT, estadística, programa.

Artículo recibido en abril de 1998. Revisado en octubre de 1998.

Correspondencia a: Departamento de Economía Aplicada. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Almería. España. NIF: 27.219.992-K. Dirección particular: c/ Martínez Campos, 15-2º. 04001-ALMERÍA. ESPAÑA. Tfno.: 950 25.13.00 / Fax: 25.17.9 e-mail: jgarcia@ualm.es

1. Introducción

El acrónimo PERT tiene su origen en el nombre dado por Booz, Allen y Hamilton[1] a una técnica ideada por éllos para estimar la duración de la construcción de un misil balístico, correspondiendo a las iniciales de Program Evaluation and Review Technique.

El fundamento de esta metodología es la utilización de la distribución beta, cuyo modelo probabilístico es:

$$f(t) = \frac{(t-a)^{(p-1)}\,(b-t)^{(q-1)}}{(b-a)^{(p+q-1)}\,b(p,q)} \quad \text{si } a < t < b, p > 1 \text{ y } q > 1 \qquad (1)$$

La gráfica de esta función tiene una forma acampanada asimétrica y, en general, la media no coincide con la moda cortando al eje de abcisas en los puntos a y b. Las características de estas distribuciones, Dumas de Rauly (1968) son las siguientes:

$$\text{moda: } m = \frac{p-1}{p+q-2}\,b + \frac{q-1}{p+q-2}\,a \qquad (2)$$

$$\text{media: } m = \frac{p}{p+q}\,b + \frac{q}{p+q}\,a \qquad (3)$$

$$\text{varianza: } s^2 = \frac{pq\,(b-a)^2}{(p+q+1)\,(p+q)^2} \qquad (4)$$

En la práctica, el método PERT requiere que el "experto" asigne tres valores distintos (tiempo, en el caso de tareas, flujo de caja, en el caso de inversiones, etc ...) a saber to optimista, t_m más probable y t_p pesimista. Cada una de estas estimaciones tiene un sentido claro en el problema y nos permite identificar directamente a y b haciéndolos coincidir con los valores pesimistas y optimistas; si además identificamos el valor más probable con la moda -véase ecuación (2)- tendremos una expresión que relaciona p con q:

$$t_m = \frac{p-1}{(p+q-2)}\,t_p + \frac{q-1}{p+q-2}\,t_0 \qquad (5)$$

1. Tomado del trabajo de Pulido San Román *et al.*, citado en la bibliografía.

Esta expresión no determina exactamente los valores de p y q. El método PERT clásico sacrifica en este punto el rigor en favor de la simplicidad [Figueras Andú, J. (1964)], aceptando, tras una aproximación, que:

$$p = 3 + \sqrt{2}\, q = 3 - \sqrt{2} \text{ si la moda } > \frac{(a+b)}{2} \qquad (6)$$

$$p = 3 - \sqrt{2}\, q = 3 + \sqrt{2} \text{ si la moda } < \frac{(a+b)}{2} \qquad (7)$$

en caso de que moda = *(a+b)/2* tendríamos la beta simétrica; véase la Figura 1.

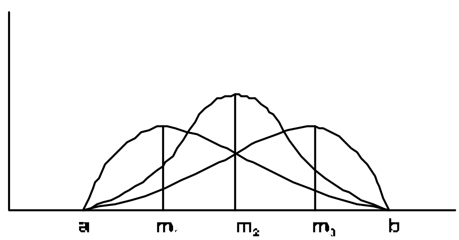

Figura 1

El error que puede cometerse por una asignación inadecuada de valores p , q, en el supuesto que la distribución beta se ajuste adecuadamente, se puede estimar [MacRIMMON y RYAVEC (1964)] en un máximo del 33% en el caso de la media, y en un 17% para la desviación típica, pudiendo reducirse a un 4% y un 7% si $(0<p<5)$ y

$$\left|\frac{a+b}{2} - moda\right| \leq \frac{1}{6} \qquad (8)$$

Por lo tanto, como hemos visto, los creadores de este método utilizaron una beta con unos parámetros p y q dados, es decir unos parámetros predeterminados, y en palabras de Pulido (1964), parece ser que gran parte de las tareas analizadas en la construcción del misil balístico se ajustaban en sus tiempos a la distribución beta propuesta. Esto es, se utilizó una misma familia de betas (aquellas que cumplen la restricción en los parámetros p y q) para estimar todas las tareas que nos ocupaban. A pesar de esto, este método, seguramente por su simplicidad ,ha sido admitido sin variación alguna en numerosos trabajos y aplicaciones de índole industrial, adminis-trativa comercial etc...

Resulta evidente que existe una debilidad en la utilización del método, derivada del planteamiento anterior, pues es muy discutible que se pueda aceptar una única distribución para situaciones tan diversas y heterogéneas como aquellas a las que se aplica en la actualidad.

En estos últimos treinta años, distintos autores han venido proponiendo una revisión de las hipótesis propuestas por los creadores del método PERT: Grubbs (1962), MacCrimmon and Ryavec (1964), Pulido *et al*. (1964), Vazsonyi (1970), Herrerías (1989).

Reparametrizando las ecuaciones anteriores, y llamando k = p + q - 2, se puede ver de otro modo el problema que venimos tratando de poner de manifiesto; haciendo los cálculos:

$$p = 1 + k\frac{m-a}{b-a}; q = 1 + k\frac{b-m}{b-a} \qquad (9)$$

llegando -véase Golenko-Ginzburg (1988) y Herrerías (1989)- a las siguientes expresiones para la media y la varianza:

$$\text{media} = m = \frac{a + km + b}{k+2} \qquad (10)$$

$$\text{varianza} = s^2 = \frac{k^2(m-a)(b-m) + (k+1)(b-a)^2}{(k+3)(k+2)^2} \qquad (11)$$

Ya que p>1 y q>1 , es evidente que k variará en el intervalo (0, 4), y por lo tanto, para unos valores dados de a,b y para un valor dado de la moda m , para cada valor de k comprendido entre 0 y 4 existirá una distribución distinta de beta.

Podemos plantear el problema en los siguientes términos: es imposible estimar los cuatro parámetros de la distribución beta (a, b, p, q) partiendo de las tres estimaciones aportadas por el experto (pesimista, optimista y más probable); por lo tanto se necesita más información para determinar estos cuatro parámetros, y esa información adicional se puede buscar por dos caminos: con hipótesis simplificadoras, como es el caso del PERT clásico -véase Figuera Andú (1964), Sasieni (1986), Littlefield y Randolph (1987), Gallagher (1987)-, o recabando mayor información del experto; en esta línea se pueden citar los trabajos de Chae Kim (1990), Moitra (1990), Herrerías R. y Pérez Rodríguez E. (1991), Herrerías R. (1995) y Pérez Rodríguez (1995). Citando a este último, hemos de añadir que la dificultad de este camino reside en que las preguntas a formular al perito han de reunir un equilibrio entre una interpretación muy intuitiva, lo que hace posible la obtención de respuestas fiables, y una cómoda incorporación de la información así obtenida en el armazón teórico de la distribución beta.

Por lo tanto, nos estamos enfrentando con un problema que se puede plantear en unos términos algebraicos así de sencillos: ¿ qué se puede hacer en un caso concreto de estimación de una beta de primera especie (como en el PERT) para elegir un valor de k que determine una distribución beta particularizada a nuestro problema, del cual ya se conocen a, b y m ? El problema estaría resuelto de una forma sencilla, si se pudiera preguntar directamente al experto, pero este parámetro k desgraciadamente no reúne las condiciones señaladas por Pérez Rodríguez (1995) citadas en el párrafo anterior.

2. El método de subasta

El método que vamos a proponer para particularizar una beta a un caso concreto en el que los valores pesimista, optimista y más probable (a , b , m) ya se conocen, es el siguiente: vamos pedir al experto que apueste por un valor concreto, al que vamos a llamar valor de subasta s ; este valor lo vamos a igualar con la media:

$$s = \frac{a + km + b}{k + 2} \tag{12}$$

esta ecuación nos permitirá despejar el valor de k, que junto con a, b, y m, particulariza una distribución beta que es la que vamos a emplear en nuestro problema concreto. Si el valor de subasta es

$$s = \frac{a + 4m + b}{6}\text{;entonces} \quad k = 4 \tag{13}$$

Como podemos ver, en el método PERT clásico el valor de subasta es siempre el dado en (13), es decir, k = 4. Lógicamente la subasta elegida en el PERT clásico está siempre comprendida entre (a+b)/ 2 y m para cualquier valor de a , b y m.

En primer lugar debemos de preguntarnos si *s* puede tomar un valor cualquiera, ya que en principio no parecería lógico que después de dar un valor optimista, uno pesimista y un valor más probable, en el momento de dar el valor de subasta se optara por un valor totalmente desvinculado de los anteriores. A tal efecto veamos las definiciones y proposiciones siguientes:

DEFINICIÓN 1. Llamamos subasta a cualquier método que nos permita determinar un valor de s.

DEFINICIÓN 2. Dados a, b y m , decimos que una subasta es coherente si determinado el valor de s , este nos permite obtener un valor de k comprendido entre 0 y 4; en cualquier otro caso diremos que la subasta es incoherente.

PROPOSICIÓN 1. Si $(a+b)/2 \neq s \neq m$, entonces s debe encontrarse en uno de estos intervalos abiertos: $(a+b)/2 < s < m$, o $m < s < (a+b)/2$ para que el método de subasta sea consistente. Si $(a+b)/2 = m$, estaríamos entonces ante la beta simétrica.

Demostración. Si k la despejamos en función de s en (12), tendremos:

$$k = \frac{\left(\frac{a+b}{2} - s\right) 2}{s-m} = 2\frac{c-s}{s-m} \tag{14}$$

Teniendo en cuenta que k debe ser siempre positivo, podremos concluir:

si $(a+b)/2 < s$ entonces $(a+b)/2 < s < m$; si c < s entonces s< m ; c < s < m ;

si $s < (a+b)/2$ entonces $m < s < (a+b)/2$; si $c > s$ entonces $s > m$; $m < s < c$

Por otra parte, si $(a+b)/2 = m$, entonces, haciendo uso de la anterior parametrización (9), podemos escribir: (15)

$$p = 1 + k\frac{\frac{(a+b)-a}{2}}{b-a} = 1 + \frac{k}{2}, \text{ del mismo modo }, q = 1 + \frac{k}{2}$$

que cumple con la ecuación $p + q - 2 = k$. Por otra parte, si $(a+b)/2 = m$, el valor de s estaría siempre determinado, ya que: (16)

$$\frac{a + k\frac{(a+b)}{2} + b}{k+2} = \frac{2(a+b) + k(a+b)}{2(k+2)} = \frac{a+b}{2}$$

Es decir, el valor de subasta s siempre será igual a $(a+b)/2$.

Como vemos, el valor de subasta que se va a igualar a la media -ecuación (10)-, para obtener el valor de k, tiene un comportamiento similar a la mediana [Troutt (1989)] pone de manifiesto que en cualquier caso (sin necesidad de que la distribución subyacente sea una beta) la fórmula (10), con k = 4, es una buena aproximación del valor medio, siempre que la mediana pueda ser utilizada en lugar de la media o asumamos que son equivalentes. De algún modo, es un antecedente de lo que hacemos en este trabajo.

La cuestión que abordamos ahora es la relación que existe entre k y s . Nos interesa saber qué valores toma k a medida que varía s . La siguiente proposición establece esta relación.

PROPOSICIÓN 2. La función k = f(s) está definida en el intervalo (m , (a+b)/2) si m < (a+b)/2, o en el intervalo ((a+b)/2 , m) si (a+b)/2 < m.

Es una función continua en todo el intervalo de definición. Además, es una función creciente en el intervalo de definición si m > (a+b)/2, y decreciente si m < (a+b)/2.

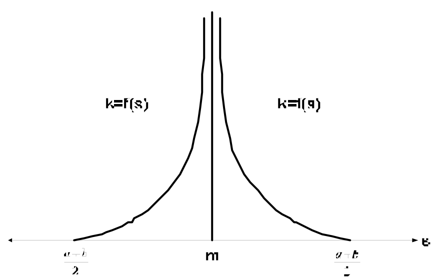

Figura 2.

Demostración. Como $s = \frac{a + km + b}{k + 2}$, despejando:

$$k = f(s) = \frac{2s - (a+b)}{k+2} = 2\,\frac{s-c}{m-s} \qquad (17)$$

Derivando esta expresión, obtenemos:

$$\frac{dk}{ds} = \frac{df(s)}{ds} = \frac{2m-(a+b)}{(m-s)^2} = 2\,\frac{m-c}{(m-s)^2} \qquad (18)$$

A la vista de esta expresión está claro que k = f(s) es una función continua en el intervalo de definición, ya que es un polinomio en el que nunca se anula su denominador, y además el signo de su derivada es positivo si *m > (a+b)/2*, y negativo si *m < (a+b)/2*.

Por lo tanto, cuando trabajemos con una beta asimétrica a la derecha, el valor de k crecerá con el valor de s; si trabajamos con una beta asimétrica a la izquierda, el valor de k disminuirá al aumentar el valor de s. En definitiva se puede afirmar que el valor de k disminuye a medida que s se aproxima al punto medio (a+b)/2, y aumenta a medida que tiende a valer m. A medida que el experto demuestra una mayor confianza en el valor más probable que ha dado antes k va a ser mayor; cuando disminuya su confianza y opte por el valor medio k va a tender a cero.

Además es obvio que:

$$\lim_{s \to m} f(s) = \infty; \quad \lim_{s \to \frac{(a+b)}{2}} f(s) = 0 \tag{19}$$

PROPOSICIÓN 3. Cuando s tiende hacia (a+b)/2 , la varianza de la beta particularizada por la subasta tiende a la de la uniforme de valores a y b. Cuando s tiene hacia m, la varianza de la beta particularizada por la subasta tiende a cero.

Demostración. Tratamos en esta proposición de ver cuál es el efecto sobre la varianza de la beta particularizada de los distintos valores que pueda tomar s dentro de su campo coherente de variación; es decir ¿ cómo evolucionará la varianza de la distribución beta particularizada a medida que varía s?

Para tratar de responder a esta pregunta sustituimos k por su valor en función de s (k = f(s)), en la ecuación que da la varianza, de la que obtendremos: (20)

$$s^2(s) = \frac{\left[\dfrac{2s-(a+b)}{m-s}\right]^2 (m-a)(b-m) + \left[\dfrac{2s-(a+b)}{m-s} + 1\right](b-a)^2}{\left[\dfrac{2s-(a+b)}{m-s} + 3\right]\left[\dfrac{2s-(a+b)}{m-s} + 2\right]^2}$$

$$s^2(s) = \frac{4\left[\dfrac{2s-c}{m-s}\right]^2 (m-a)(b-m) + \left[\dfrac{2s-c}{m-s} + 1\right](b-a)^2}{\left[\dfrac{2s-c}{m-s} + 3\right]\left[\dfrac{2s-c}{m-s}\right]^2}$$

y esta ecuación puede expresarse: (21)

$$s^2(s) = \frac{4(s-c)^2 (m-a)(b-m)(m-s) + [2(s-c)+m-s](b-a)^2 (m-s)^2}{[2(s-c)+3(m-s)][2(s-c)+2(m-s)]^2}$$

de la que se deduce que:

$$\lim_{s \to m} s^2(s) = 0 \tag{22}$$

$$\lim_{s \to \frac{(a+b)}{2}} s^2(s) = \frac{(b-a)}{12} \tag{23}$$

resultados ambos que pueden ser obtenidos de un modo más elemental si partimos de la expresión (11) y de los valores de k en función de s.

Por lo tanto, cuando el valor de subasta tiende a tomar el valor (a+b)/2 , la varianza de la beta particularizada tiende a valer lo mismo que la varianza de la distribución rectangular uniforme; es decir, el efecto de que el valor de subasta tienda a (a+b)/2 es que el experto, a la hora de apostar por un valor, no confía en el valor más probable dado por él antes y opta por el valor medio, conduciéndonos de este modo a una varianza similar a si hubiésemos estimado una distribución uniforme, prescindiendo del valor más probable, en el que el experto demuestra tener ninguna confianza (k = 0).

Por otra parte, cuando el experto opta por el valor más probable como valor de subasta, lo que hace es reafirmar su absoluta confianza en este valor y, en consecuencia, la varianza de la beta particularizada se hace cero y degenera la distribución[2].

COROLARIO 1.

Si $\frac{(a+b)}{2} < m$ entonces $\forall s \in \left[\frac{a+b}{2}, m\right] \rightarrow \frac{ds^2}{ds} < 0$

Si $\frac{(a+b)}{2} > m$ entonces $\forall s \in \left[m, \frac{a+b}{2}\right] \rightarrow \frac{ds^2}{ds} > 0$

---

2. (21) se obtiene a partir de la (8), de Herrerías (1989). Si hacemos b_2: $b_2 = \frac{m-s}{2s-(a+b)} = \frac{1}{2}\frac{m-s}{m-c}$

$$s^2(s) = \frac{\left\{\left[\frac{2s-(a+b)^2}{m-s}\right](m-a)(b-m) + \left[\frac{2s-(a+b)}{m-s} + \frac{m-s}{m-s}\right](b-a)^2(m-s)\right\}(m-s)}{\left[2s-(a+b)+3(m-s)\right]\left[2s-(a+b)+2(m-s)\right]^2}$$

$$s^2(s) = \frac{\left\{(m-a)(b-m) + 1 + \left[\frac{m-s}{2s-(a+b)}\right](b-a)^2\frac{m-s}{(2s-(a+b))^2}\right\}\frac{m-s}{2s-(a+b)}}{\left[1+3\frac{m-s}{2s-(a+b)}\right]\left[1+2\frac{m-s}{2s-(a+b)}\right]}$$

tomando b_2 de la anterior expresión: $\frac{b_2\left[(m-a)(b-m) + (b-a)^2(b_2+b_2^2)\right]}{(1+3b_2)(1+2b_2)}$

el estudio de la varianza está hecho en el citado trabajo de Herrerías (1989).

De este modo el experto deberá apostar por un valor de subasta que esté comprendido entre el valor medio y el valor más probable. A medida que el valor por el que apueste el experto se aproxime al valor medio, la varianza de la beta particularizada irá aumentando (en cualquier caso) hasta valer la de la distribución uniforme, y a medida que el valor de subasta se aproxime al valor más probable (en cualquier caso) la varianza irá disminuyendo hasta tomar el valor cero.

COROLARIO 2.

Si s es un valor de subasta coherente, a partir del cual se obtiene un valor de k comprendido en (0, ∞), la varianza de la beta particularizada estará acotada superiormente por la varianza de la distribución uniforme correspondiente a los valores de a y b. La representación de la varianza en función de s, puede verse en las siguientes gráficas:

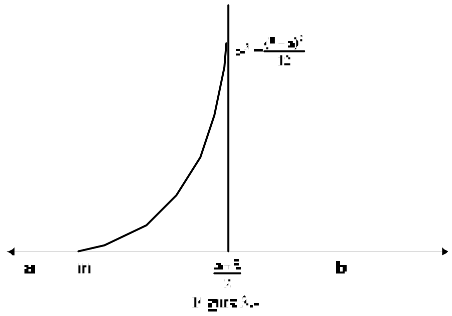

Figura 3.

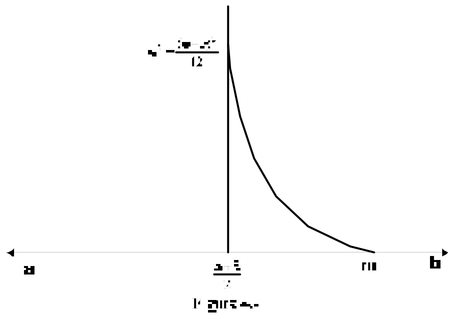

Figura 4.

ÍNDICE

3. Conclusiones y posibilidades de trabajos futuros

A lo largo de este trabajo se describe un método que permite particularizar la beta de manera distinta a como se hacía en el PERT. Este método requiere que el experto opte por un valor, que en el trabajo hemos llamado de subasta, mediante el cual se ajusta una beta perfectamente especificada, con una varianza que está en función del valor de subasta, lo que permite obtener intervalos de confianza en función de esta varianza, en definitiva, en función del valor de subasta.

Por otro lado, a través de la varianza de la beta particularizada, se puede obtener un índice de la confianza que el experto tiene en el valor más probable aportado por él; cuanto mayor sea esa confianza, menor será la varianza de la beta particularizada, y viceversa. Se puede construir este índice dividiendo la varianza de la beta particularizada entre la de la distribución uniforme. Un índice próximo a 1 significaría una desconfianza total en el valor más probable, y cercano a 0 significaría una confianza total. A medida que disminuye el índice aumenta la confianza.

Creemos que el método aquí expuesto podría encontrar aplicación práctica en muchas situaciones en las que el resultado futuro de un suceso económico en ambiente de incertidumbre debe ser evaluado prematuramente, apostando por un valor concreto. El mercado de futuros sería un buen campo para aplicar este método, ya que en el mismo se están vendiendo, en los años 0, 1, 2, ... n-1, la cosecha del año n, debiendo optar por valores de subasta en cada una de esta ocasiones. Cada apuesta puede ser traducida en el nivel de confianza que el experto predijo para la realización definitiva en el año n. Por otra parte, el mercado financiero de la compraventa de opciones de compra, o de opciones de venta, así como el estudio de las estrategias de cobertura en ambiente de incertidumbre, sin duda, constituyen un campo donde pueden encontrar una amplia aplicación los resultados que acabamos de exponer.

4. Una aplicación práctica

Estamos tratando de llegar a un acuerdo de disolución de una empresa que presenta un balance que recogemos en el Anexo 1 de este trabajo. Como podemos ver, en el balance aparecen unos valores históricos para cada uno de los elementos, y a continuación aparecen unos valores de realización que han sido estimados por las partes y sobre los que no existe un total acuerdo, sobre todo si pensamos que una parte del accionariado que está dispuesto a quedarse con la empresa evitando la liquidación total, conservará sólamente una parte del activo, a cambio de su participación.

El accionariado está compuesto por tres entidades A (5%), B(5%) y C(90%). Esta empresa, que en lo sucesivo será XSA, está interesada en llegar a un acuerdo previo a la disolución, mediante el cual C ceda todas sus acciones a A y B, que para pagarlas realizarán, a medio plazo, todas las partidas del activo excepto la fábrica vieja que seguirá estando en la empresa. La condición previa es que se llegue a un acuerdo de valoración de los activo. En función de la valoración que aparece en el balance, la participación del 90% se estima en pesetas:

$$0.9 \ (430{,}941{,}388 - 150{,}000{,}000) = 252{,}847{,}249$$

Sin embargo el accionariado minoritario no está de acuerdo con la sobrevaloración que se le ha dado a lo que aparece en el balance bajo el epígrafe " fábrica vieja ", que es con lo que se les pretende pagar su parte, y con la valoración a la baja del resto. Como consecuencia de este desacuerdo y de la gran incertidumbre sobre los valores de realización de parte del activo, deciden acudir a la metodología PERT para establecer un intervalo de negociación, confeccionado el siguiente cuadro de asignación de valores:

CUADRO DE ASIGNACIÓN DE VALORES. METODOLOGÍA PERT.

4.1. *VALORES QUE ARROJAN INCERTIDUMBRE EN SU VALORACIÓN*

P1 = FACTORÍA
P2 = TERRENOS
P3 = CONSTRUCCIONES EN CURSO
P4 = MAQUINARIA
P5 = EXISTENCIAS
P6 = DEUDORES

4.2. *VALORES SIN INCERTIDUMBRE.*

Las demás partidas no arrojan ninguna incertidumbre sobre su realización por tratarse de activos líquidos cuyo valor de realización coincide con el valor contable.

F1 = Accionistas por desembolsos no exigidos 150,000,000
F2 = Fianzas y depósitos 150,880
F3 = Inversiones financieras temporales 102,642,451
F4 = Tesorería 15,283,012

$$P0 = F1 + F2 + F3 + F4 = 268{,}076{,}343$$

4.3. *PROPUESTA DE ACUERDO*

	Pesimista	Más probable	Optimista
P1 = Fábrica vieja	24.5x106	35.0x106	45.0x106
P2 = Terrenos	40.0x106	45.0x106	50.0x106
P3=Construcciones	0.5x106	8x106	10.0x106
P4 = Maquinaria	40.0x106	50.0x106	55.0x106
P5 = Existencias	0.3x106	35.0x106	42.0x106
P6 = Deudores	12.0x106	15.0x106	20.0x106
Σ	124.5x106	188.0x106	222x106

Usando:

$$E(P_i) = \frac{\text{v.pesimista} + 4(\text{v.m s probable}) + \text{v.optimista}}{6}$$

$$s^2(P_i) = \frac{(\text{v.optimista} - \text{v.pesimista})^2}{6^2}$$

4.4. *CÁLCULOS DE VARIANZAS Y VALORES ESPERADOS.*

E(P1) = 34916666,6667	VAR(P1) = 11673611111111
E(P2) = 45000000	VAR(P2) = 2777777777778
E(P3) = 7833333,33333	VAR(P3) = 694444444444
E(P4) = 49166666,6667	VAR(P4) = 6250000000000
E(P5) = 30833333,3333	VAR(P5) = 42250000000000
E(P6) = 15333333,3333	VAR(P6) = 1777777777778

Entonces:

E (ACTIVOS NETOS) = P0+E(P1)+E(P2)+E(P3)+E(P4)+E(P5)+E(P6)
E (ACTIVOS NETOS) = 451.159.676,33

$$s^2(\mathit{ACTIVOS\ NETOS}) = \sum_{i=1}^{i=6} s^2(P_i)$$

VAR (ACTIVOS NETOS) = 65.423.611.111.111

Por lo tanto, siguiendo a Suárez pág.158:

$$\frac{V.ACTIVOS\ NETOS - 422.626.343}{7.724.029,86} \cong N(0,1)$$

El intervalo de confianza del 95% será:

(435,306,243.126 ; 467,013,109.54)

Como podemos ver, este intervalo ni siquiera contiene al valor atribuido en el balance inicial; es decir, este intervalo de negociación ha sobrevalorado los activos netos. Por esta razón se va a intentar llegar a un acuerdo mediante una subasta real de cada una de las partidas que componen el activo neto, de manera que se va a aceptar como valor de subasta la puja más alta de los tres accionistas, realizando la subasta como si cada uno de ellos fuese a quedarse con el bien en cuestión; más adelante veremos las limitaciones. Una vez establecido el valor de subasta para cada bien en lugar de adjudicar el bien vamos a particularizar la beta del PERT utilizando el siguiente procedimiento:

a = valor pesimista
b = valor optimista
m = valor mas probable
s = valor de subasta

Igualamos para cada una de las partidas i = 1,2,3,4,5,6:

$$s = \frac{a + k m + b}{k + 2}$$

y despejamos k para cada una de ellas:

$$k_i = \frac{a_i + b_i - 2 s_i}{s_i - m_i} \text{;desde} \quad i = 1 \quad a \quad 6$$

obteniendo los siguientes resultados en miles de pesetas:

	V.PES.	M.P.	O.P.	(a+b)/2	V.k.	V.SUB.	VARIANZA
	a	m	b		k	s	
P1	24.500,00	35.000,00	45.000,00	34.750,00	0,50	34.800,00	30.017.142,86
P2	40.000,00	45.000,00	50.000,00	45.000,00	0,00	45.000,00	8.333.333,33
P3	5.000,00	8.000,00	10.000,00	7.500,00	0,50	7.600,00	1.782.857,14
P4	40.000,00	50.000,00	55.000,00	47.500,00	0,50	48.000,00	16.000.000,00
P5	3.000,00	3.500,00	4.200,00	3.600,00	0,00	3.600,00	120.000,00
P6	12.000,00	15.000,00	20.000,00	16.000,00	1,64	15.550,00	3.407.303,92
					TOTAL	154.550,00	59.660.637,25

PES.V.= VALOR PESIMISTA
M.P.= VALOR MÁS PROBABLE
O.P.= VALOR OPTIMISTA
k.V.= VALOR de k
A.V.= VALOR DE SUBASTA

obteniendo las siguientes varianzas:

var (p1) = 30.017.142,86
var (p2) = 8.333.333,33
var (p3) = 1.782.857,14
var (p4) = 16.000.000,00
var (p5) = 120.000,00
var (p6) = 3.407.303,92
var(total) = 59,660,637.25
desv. = 7,724.03

Al trabajar en miles, pasamos a unidades:

desv. = 7,724,029.86
P0 = 268,076,343.00
P1+P2+P3+P4+P5+P6 = 154,550,000

$$\sum_{1=0}^{i=6} P_i = 422.626.343{,}00$$

$$\frac{\text{V.ACTIVOS NETOS} - 422.626.343}{7.724.029{,}86} \approx N(0,1)$$

Obteniendo un intervalo de confianza del 95%:

(407,487,244.48 ; 437,765,441.52)

que ahora sí encierra al valor inicial; aunque este está más cerca del extremo superior que del extremo inferior del nuevo intervalo, lo lógico será negociar a la baja. Este método nos permite obtener un intervalo de negociación donde ha intervenido la valoración subjetiva que cada individuo le daba a la partida correspondiente, con la condición de que estuviese dispuesto a quedársela y eligiendo la mejor subasta. No hemos trabajado con la beta del PERT clásico, lo hemos hecho en cada partida con una beta ajustada a ella mediante el método de subasta.

Como vemos, el método de subasta es tautológico respecto al valor esperado; es decir, acepta como valor esperado el valor de subasta, siendo ésta una de las principales críticas que se le pueden hacer a este método. Sin embargo, en este caso, lo que preocupa principalmente es la varianza, al contrario que en el PERT, que acepta implícitamente que la desviación típica era un sexto del recorrido, lo que le permitía obtener el valor esperado. Se ha podido ver en el ejemplo anterior que utilizando las betas del PERT clásico nunca podríamos haber obtenido un intervalo de negociación que condujese al acuerdo. Por consiguiente, cuando se pretende establecer unos intervalos de negociación, resultará de mayor utilidad trabajar con betas cuya varianza no sólo dependa del recorrido.

ÍNDICE

ANEXO 1

ACTIVO

Accionistas		150.000.000	150.000.000
Inmovilizado		266.304.274	144.432.224
	Fábrica vieja	88.042.956	40.281.344
	Inmovilizado	147.316.616	
	Amortizaciones	-59.273.660	
	Fábrica nueva	1.781.104.388	104.000.000
	Terreno	46.001.990	45.000.000
	Constr. en curso	32.674.966	9.000.000
	Maquinaria	99.433.482	50.000.000
	Depósitos	150.880	150.880
Activo circulante		142.930.310	142.930.310
	Existencias	4.015.275	4.015.275
	Deudores	21.007.572	21.007.572
	Inv.Finan.Temp.	102.624.451	102.624.451
	Tesorería	15.283.012	15.283.012
Total Activo		559.234.584	437.362.534

PASIVO

		Imptes. Reales	Imptes. Acuerdo
Fondos propios		552.813.438	430.941.366
	Capital	600.000.000	600.000.000
	Res.neg.anteriores	-50.801.337	-50.601.337
	Pérdidas y ganan.	3.614.775	3.614.775
	Diferencias Valor.		-121.872.050
Pasivo Circulante		6.421.146	6.421.146
	Deudas Gr.Empr.		
	Acreed.Comerc.	4.511.945	4.511.945
	Otras deudas	1.909.201	1.909.201
Total Pasivo		559.234.584	437.362.534

Bases del Acuerdo		
Cambio 10% Participación Fábrica Vieja		
Capital Social		600.000.000
Pendiente Desembolso		-150.000.000
Pérdidas acumuladas		50.801.337
Resultados 1995		3.614.775
Valor Neto		402.813.436
	10%	40.281.944

Valor Participación		
Valor Liquidación Propuesta		258.547.249
Tesorería disponible		240.509.164
Inversiones Temporales	102.624.451	
Venta Activos		104.000.000
Resto Circulante Neto	39.884.713	
Déficit Neto	12.338.085	

Bibliografía

CHAE, K., AND KIM, S., (1990). Estimating the Mean and Variance of PERT Activity Time using Likelihood Ratios of the Mode and the Midpoint, I.I.E. Transaction, Vol. 22, Nº 3, 198-203

DUMAS DE RAULY, D. (1968). L'Estimation Statistique. Gauthier-Villars. Paris.

GALLAGHER, C. (1987). A note on PERT assumptions. Management Science, vol 33, num 10, pág. 1360.

GOLENKO-GINZBURG, D. (1988). On the Distribution of Activity Time in PERT, J. Operation Research Society, Vol. 39, Nº 8, 767-771.

FIGUERAS ANDÚ, J. (1964). Técnicas modernas de planificación, programación y control de proyectos. Saeta. Madrid.

GRUBBS, F. (1962). Attempts to validate certain PERT statistics or picking a PERT, Operations Research 10 , 912-915

HERRERÍAS PLEGUEZUELO, R. (1989). Utilización de modelos probabilísticos alternativos para el método PERT. Aplicación al Análisis de Inversiones. Estudios de Economía Aplicada. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Valladolid, 89-112.

HERRERÍAS PLEGUEZUELO, R. (1995). Un nuevo uso de las tres estimaciones subjetivas del PERT. IX Congreso Asepelt, Vol. IV, 411-416.

HERRERÍAS PLEGUEZUELO, R. AND PÉREZ-RODRÍGUEZ, E (1991). Estimación de una distribución Beta como modelo para su utilización en el Método PERT. V Congreso Asepelt, Pub. La Caja de Canarias. 445-452.

LITTLEFIELD, T. AND RANDOLPH, P. (1987). An answer to Sasieni's question on PERT times. Management Science 33, 1357-1359.

MACCRIMMON, K. AND RYAVEC, C. (1964). An analytical study of the PERT assumptions. Operation Research, Vol. 12, Nº 1, 16-37.

MOITRA, S. (1990). Skewness and the Beta distribution, J. Operation Research Society, Vol. 41, Nº 109, 953-961.

PÉREZ-RODRÍGUEZ, E. (1995). Ajuste de un modelo Beta con información adicional sobre su apuntamiento. IX Congreso Asepelt, Vol. IV, 445-452.

PULIDO SAN ROMÁN, A., GARCÍA SESTAFE, J.V. AND CORTIÑAS BRAVO, G. (1964). Un método de la I.O.: Teoría de Grafos in Anales de la Economía (July-September 1964, 2nd era, Nº 7. Published within Matemáticas para economistas 2 by J.M. Doblado Burón (1977), Confederación Española de Cajas de Ahorro, Madrid.

ROMERO LÓPEZ, C. (1991). Técnicas de programación y control de proyectos (4ª edición). Pirámide. Madrid.

SASIENI, M.W. (1986). A note on PERT times. Management Science 32, 1652-1653.

SUÁREZ SUAREZ, A. (1988). Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa. Pirámide. Madrid.

TROUTT, D. (1989). On the generality of the PERT average time formula. Decision Sciences, Vol. 20 , 410-412.

VAZSONYI, A. (1970). L´Histoire de Grandeur et de la Décadence de la Méthode PERT. Management Science, Vol. 16, Nº 8 , B-449B-455.