

Estudios de Economía Aplicada
Nº 11, 1999. Págs. 121-142

Modelos de mercado: una aplicación de la Teoría de Colas

PARRA FRUTOS, I.
ARANDA GALLEGO, J.
Universidad de Murcia

Esta versión incluye todas las correcciones sugeridas por el evaluador anónimo, las cuales nos han parecido oportunas y agradecemos sinceramente.

RESUMEN

En este trabajo realizamos una revisión de los modelos de mercado (monopolio, duopolio y competencia perfecta) en los que se ha utilizado la teoría de colas. El uso de la teoría de colas permite tratar modelos más realistas al describir la demanda y la producción a través de procesos estocásticos, incorporando así la incertidumbre. El objetivo que perseguimos consiste en analizar el proceso de aplicación de una teoría puramente estadística en la modelización de las estructuras de mercado tradicionales. De este modo pondremos de manifiesto las ventajas de su utilización así como las aportaciones que la misma permite obtener desde el punto de vista de la economía.

Palabras clave: Teoría de Colas, Modelos de Mercado, Empresas de Servicios, Cuotas de Mercado, Incertidumbre.

ABSTRACT

In this paper we review some market models (monopoly, duopoly and perfect competition) in which queuing theory has been used. The use of queuing theory lets us work on more realistic models depicting demand and production through stochastic processes, that is, incorporating uncertainty with supply and demand. The goal of this paper is to analyse the application process of a purely statistical theory in modelling different traditional market structures. Thus, we show advantages of its use in this context, as well as contributions that it lets us obtain from the economic point of view.

Keywords: Queuing Theory, Market Models, Servicing Firms, Market Shares, Uncertainty.

Artículo recibido en septiembre de 1997. Revisado en noviembre de 1998.

1. Introducción

La teoría de colas constituye una rama de la teoría de la probabilidad aplicada, cuyo objetivo consiste en proporcionar modelos que describan el comportamiento de sistemas que prestan un servicio a una demanda aleatoria. Ha sido aplicada, fundamental y ampliamente, a sistemas informáticos y de telecomunicaciones¹ y de forma relativamente más novedosa² a la economía y la empresa. Precisamente en este campo está demostrando ser una herramienta de gran utilidad para la modelización bajo incertidumbre.

Siguiendo a Hirshleifer y Riley (1979), podemos distinguir entre "incertidumbre tecnológica" (o incertidumbre de sucesos) e "incertidumbre de mercado", dependiendo de que la incertidumbre recaiga sobre sucesos exógenos o variables endógenas del sistema económico, respectivamente. Los modelos donde se incorpora la "incertidumbre de mercado" se caracterizan principalmente por la necesidad de estudiar, por un lado y a nivel individual, el proceso de búsqueda y, por otro lado y a nivel de mercado, la dinámica del desequilibrio. Este desequilibrio es entendido como la imposibilidad de adecuar oferta y demanda de tal forma que los mercados se vacíen instantáneamente periodo a periodo. Estas características fueron puestas de manifiesto y revisadas por Rothschild (1973) y Lippman y McCall (1976).

Los modelos de mercado en los que se ha utilizado la teoría de colas y que son de interés en este trabajo incorporan la incertidumbre bajo la forma de "incertidumbre de mercado". Consecuentemente, van a considerar los dos aspectos que surgen de la misma. Por un lado, estudian diversos procesos de búsqueda por parte del consumidor que, a su vez, constituyen una respuesta natural y muy común en un entorno incierto. Por otro lado, describen la oferta y la demanda a través de procesos estocásticos incorporando de esta forma la incertidumbre. Esta aleatoriedad provoca que la oferta y demanda no puedan estar sincronizadas y que, por tanto, se formen colas de espera. El hecho de que se forme una cola está indicando la existencia de un desequilibrio en el sentido anteriormente descrito pero que, sin embargo, no es incompatible con la existencia de un equilibrio estadístico o estacionario. Además, se puede demostrar que intentar eliminar estas colas (desequilibrio), consecuencia de la incertidumbre, es ineficiente y muy costoso, dado que requeriría un nivel de capacidad muy alto. Por todo ello, se puede afirmar que el uso de la teoría de colas permite tratar modelos más realistas.

1. El artículo considerado pionero en la teoría de colas, escrito por A. K. Erlang y publicado en 1909, consiste precisamente en una aplicación a una centralita de teléfonos. Hasta 1940, aproximadamente, el desarrollo de la teoría de colas estuvo condicionado principalmente a las necesidades encontradas en el diseño de centrales telefónicas automáticas.

2. Aunque existe alguna publicación anterior, es en los años 80 y 90 donde más se han publicado aplicaciones económicas.

En esta línea la teoría de colas se ha utilizado para la modelización de las estructuras de mercado tradicionales bajo incertidumbre, además de para intentar caracterizar la naturaleza del equilibrio de la industria. Las industrias que tienen un especial interés son particularmente las de servicios y, en general, aquellas donde el tiempo de espera y el tiempo de servicio juegan un papel fundamental.

Aunque en general hacemos referencia a empresas de servicios, Carlton (1989) y Blinder (1991) proporcionan evidencia empírica de que el tiempo de entrega es un parámetro importante, algunas veces incluso más que el precio, como mecanismo por el cuál se vacían los mercados de muchos productos industriales. Sin embargo, Zimmerman y Enell (1993) afirman que en las industrias de fabricación el tiempo de espera no es considerado como un elemento de calidad. Deacon y Sonstelie (1985) y Png y Reitman (1994) obtienen evidencia empírica de la importancia del tiempo de espera y servicio en un caso concreto de empresas de servicios como son las gasolineras.

Las empresas de servicios, por tanto, fundamentalmente difieren del resto precisamente porque requieren que los consumidores gasten una cantidad de tiempo relevante en la obtención del servicio. Esta característica diferenciadora, por un lado, va a determinar en estos modelos la calidad del servicio³, existiendo entre ambas una relación negativa. Esto es, cuanto mayor sea el tiempo necesario para la obtención del servicio menor es la calidad del mismo. Por otro lado, da lugar a que los compradores, a la hora de tomar una decisión, estén interesados no sólo en el precio monetario del servicio sino también en lo que se denomina el precio completo, el cual queda determinado por el precio monetario más el coste del tiempo que se necesita para obtener el servicio. De esta forma, el tiempo de espera funciona como un precio implícito. La *teoría de colas* permite incorporar explícitamente en la modelización el tiempo que necesariamente tiene que invertir un consumidor para la obtención del servicio que, además, se supone aleatorio debido a la incertidumbre inherente.

Los modelos estudiados representan a la empresa mediante un sistema de colas con un único canal de servicio, donde el servidor y su cola representan a la empresa y su demanda, respectivamente. La empresa fija el precio y produce a una tasa

3. Si bien es cierto que la calidad del servicio puede ser medida en términos de otros atributos tales como la localización geográfica de la empresa, las garantías ofrecidas, la adecuación del servicio a los deseos de los consumidores, la rapidez y trato de los empleados, etc. un gran número de organizaciones han comenzado a centrar su atención en la dimensión tiempo. Esto puede observarse en las campañas publicitarias de algunas empresas como, por ejemplo, las empresas de distribución de paquetes, que aseguran la entrega a primera hora del día siguiente. Las tiendas de revelado de fotografías especializadas en el revelado en una hora. Pizza Hut, por ejemplo, asegura que sirve a sus clientes en sus locales en un plazo máximo de quince minutos, no cobrando la comida en caso contrario. El lector es referido a Blackburn (1991) para ver más ejemplos.

esperada de producción dada cuando llegan los pedidos. Cuando la tasa de llegadas de pedidos excede la tasa de producción, los pedidos pasan a formar parte de una cola. Generalmente, el orden seguido para atender a los pedidos, esto es, la disciplina de servicio, sigue el criterio first-come, first-served (FCFS)⁴ o se desarrolla un esquema de prioridades (PRI). La producción continúa hasta que la cola se vacíe, deteniéndose en ese momento y reanudando sólo cuando llega otro pedido.

Por simplicidad se supone que el proceso de servicio es un proceso estocástico estacionario de Poisson con tasa de servicio esperada (número medio de individuos servidos por unidad de tiempo) dada por μ , siendo el tiempo esperado de servicio de un individuo $1/\mu$. En la literatura existente μ es identificado con la capacidad de la empresa.

En cuanto a la demanda se supone que los compradores desean una unidad del servicio y que llegan individualmente al mercado, una llegada en cada momento, de acuerdo con un proceso estocástico estacionario de Poisson con valor esperado dado por λ . De ahí, los intervalos de tiempo entre llegadas sucesivas son independientes y se distribuyen según una exponencial con valor esperado $1/\lambda$. Esencialmente, λ es el equivalente estocástico a la cantidad demandada en un escenario de certidumbre.

El objetivo de este trabajo consiste en analizar el proceso de aplicación de una teoría puramente estadística, como es la teoría de colas, en la modelización de las distintas estructuras tradicionales de mercado. Estudiaremos las ventajas que presenta la utilización de esta teoría en este contexto, así como las aportaciones que la misma permite obtener desde el punto de vista de la economía. Para ello organizamos este trabajo de la siguiente forma. Revisamos el comportamiento del consumidor, la modelización de la empresa y el análisis económico realizado en los modelos de monopolio, duopolio y competencia perfecta en las Secciones 2, 3 y 4, respectivamente. Finalmente, en la Sección 5 recogemos las conclusiones más destacadas obtenidas por los distintos modelos. Para un estudio más detallado de los modelos recogidos en este artículo ver Parra (1997).

2. El monopolio

Diversos autores han estudiado la figura del monopolio bajo la perspectiva de la teoría de colas, sin embargo, aquellos que lo han hecho de una forma específica y directa son De Vany (1976), Koenigsberg (1980, 1985) y Kalai, Kamien y Rubinovitch (1992). Mendelson (1985), por ejemplo, estudia el problema de la gestión y control de un sistema informático (en cuanto a determinación de precios, utilización y capa-

4. El primero en llegar es el primero en ser servido. Este criterio también es denominado en teoría de colas FIFO (first-in, first-out).

cidad) dentro de una gran organización, siendo aquél indirectamente considerado una empresa monopolista. Mendelson y Whang (1990) analizan la determinación de precios internos o de transferencia aplicable a un sistema informático, línea de producción, estación de servicio o servicio de comunicaciones dentro de una organización, donde no existe competencia por captar a los "usuarios". En general, el primer artículo en tratar el problema de la determinación del precio en un modelo de colas sin competencia fue Naor (1969). Naor modelizó la oferta de un bien público teniendo en cuenta el problema de la congestión y determinó la tasa o el impuesto óptimo desde el punto de vista social. El modelo y resultados de Naor han sido extendidos por otros autores como, por ejemplo, Edelson y Hildebrand (1975), Stidham (1985), Haviv (1991) y Hassin (1995).

El contexto en el que se sitúa la empresa monopolista es el siguiente. La empresa monopolista es el vendedor preferido de algún producto o servicio. Las preferencias del consumidor pueden estar basadas en distintos factores como puede ser la ubicación geográfica o en el hecho de que la empresa sea estrictamente un monopolio. En cualquier caso, incluso en este último, es posible hablar de la existencia de una forma de servicio alternativa. Por ejemplo, que exista una compañía aérea que actúe en régimen de monopolio no impide que los consumidores, en este caso los viajeros, contemplen la opción de viajar utilizando otro medio de transporte.

El estudio del monopolio lo desarrollamos a lo largo de tres apartados que recogen, por un lado, los distintos comportamientos del consumidor utilizados; por otro, los diferentes sistemas de colas necesarios para modelizar a la empresa monopolista, que vienen determinados en buena parte por el comportamiento del consumidor; y, por último, el análisis económico más destacado llevado a cabo.

2.1. Comportamiento del Consumidor

El tiempo que transcurre entre llegadas sucesivas, T , condicionado a que la empresa está fijando un precio, p , es una variable aleatoria exponencial con parámetro $\lambda(p)$. De otra forma, $\lambda(p)$ es la tasa media de llegadas, esto es, el número esperado de llegadas de consumidores por unidad de tiempo cuando la empresa fija un precio p , donde

$$\lambda_p = \frac{d\lambda(p)}{dp} < 0. \quad (1)$$

Un incremento en el precio reducirá, por tanto, el valor de λ produciendo un desplazamiento a la derecha de la distribución de T en el siguiente sentido: las probabilidades de tiempos pequeños entre llegadas disminuyen aumentando las de tiem-

pos grandes. El desplazamiento a la derecha de la distribución de probabilidad de la demanda corresponde a lo que llamaríamos reducción en la cantidad demandada; mayor precio expande el tiempo entre llegadas de los consumidores.

La estrategia de búsqueda por parte del consumidor que diseñó De Vany (1976) consiste en la determinación del tamaño de cola de la empresa monopolista a partir del cuál la ganancia esperada de obtener el servicio en la empresa alternativa es mayor que la ganancia esperada de obtenerlo en la empresa monopolista. Este valor es denotado por B y denominado valor crítico de rechazo, de tal forma que cuando un consumidor llega a la empresa monopolista y encuentra B o más individuos en ella decidirá no comprar en la misma. En la literatura de colas este tipo de comportamiento del consumidor es conocido como *balking* o rechazo de entrada. De Vany y Frey (1979) comprobaron que esta hipótesis de comportamiento era verificada en la industria del acero.

La función óptima B no es diferenciable, pero la dependencia de B con los parámetros puede ser determinada a través de un análisis numérico, de tal forma que:

$$B = B(p, p^a, c, t, v, \mu, \mu^a, L^a), \quad (2)$$

donde p y p^a son el precio monetario de la empresa monopolista y la alternativa, respectivamente; c el coste monetario fijo de trasladarse a la empresa alternativa; t el tiempo de trasladarse a la misma; v el coste unitario del tiempo; μ^a la tasa de servicio de la empresa alternativa; y L^a el número esperado de consumidores en la empresa alternativa. A partir de (2) se observa que el consumidor tolerará mayores colas en la empresa monopolista, por un lado, cuanto menor sea el precio monetario del servicio en la misma, el coste unitario del tiempo y la tasa de servicio en la empresa alternativa y, por otro lado, cuanto mayor sea el precio en la alternativa, la tasa de servicio de la monopolista y el coste monetario fijo de cambiar a la alternativa.

Koenigsberg (1980), sin embargo, considera un comportamiento reneging o renuncia, esto es, los consumidores llegan también a la empresa monopolista a una tasa λ pero, en este caso, se unen a su cola. Después de unirse a la cola y conocer el número de consumidores en el sistema pueden marcharse, esto es, pueden renunciar a ser servidos con cierta probabilidad. El uso de una probabilidad, en vez de un valor crítico de rechazo de entrada (*balking*), puede considerarse como análogo al caso en el cual existe una distribución de probabilidad de los valores críticos de rechazo, definida sobre los consumidores. De este modo, se puede considerar que Koenigsberg generaliza el comportamiento del consumidor utilizado por De Vany (1976).

Dada una tasa de renuncia k y dados n individuos en la empresa en el momento cero, la probabilidad de que un consumidor se vaya sin ser servido antes del momento t viene dada por:

$$\begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 - e^{-k(n-1)t} & \text{si } n \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$

de tal forma que el consumidor que está siendo servido no puede abandonar la empresa y, por otro lado, la probabilidad de que el individuo se marche será cero, para cualquier k y t , cuando no haya nadie o haya sólo un consumidor, esto es, para $n = 0$ y $n = 1$.

La tasa de renuncia puede ser examinada en términos económicos de tal forma que

$$k = f(p^+, p^-, v^+, W^-, c) > 0, \quad (4)$$

donde W^a es el tiempo esperado para obtener el servicio en la empresa alternativa. De esta forma, la tasa de renuncia se relaciona positivamente con el coste unitario del tiempo y el precio monetario de la monopolista, y negativamente con el coste total esperado (o precio completo) de comprar en la alternativa.

B o k pueden ser considerados como algo característico de la industria. Un valor crítico B pequeño (o un valor de k grande) podría indicar que el producto del monopolista tiene muchos sustitutos cercanos. Un valor grande para B (o pequeño para k) podría indicar una alta fidelidad de los consumidores, un producto con pocos sustitutos, o uno que sólo puede ser reemplazado mediante un cambio tecnológico caro.

Koenigsberg (1985) considera ambos comportamientos del consumidor, *balking* y *reneging*, junto con la existencia de prioridades bajo una disciplina que serán servidas de acuerdo con disciplina de servicio *pre-emptive non-resume*, esto es, un individuo que esté siendo servido tendrá que interrumpir su servicio si otro consumidor con mayor prioridad llega al sistema (*pre-emptive*, con derecho preferente) y volverá a ser servido en un momento posterior, de acuerdo con la disciplina de servicio, pero no desde donde lo dejó sino desde el principio (*non-resume*).

Koenigsberg considera, además, sistemas de colas con M clases de consumidores de tal forma que un consumidor con menor índice de clase tendrá mayor prioridad. Los consumidores pueden ser distinguidos por clases, por ejemplo, porque valoran el servicio de forma diferente, porque tienen diferentes alternativas para el servicio ofrecido o porque tienen diferente coste del tiempo de espera.

Bajo un comportamiento de rechazo de entrada (*balking*) la impaciencia de la clase i es expresada a través de un tamaño crítico de cola B_i , con $B_{m'} > B_m$ para $m' > m$, de tal forma que los individuos menos impacientes estarán dispuestos a soportar colas más largas. B_i es determinado siguiendo a De Vany (1976) y, además, verifica:

$$\frac{\partial B_i}{\partial p_i} < 0; \quad \frac{\partial B_i}{\partial v_i} < 0; \quad \frac{\partial B_i}{\partial p^a} > 0; \quad \frac{\partial B_i}{\partial (L^a/\mu^a)} > 0.$$

La modelización de distintas clases de consumidores bajo el esquema de salidas probabilísticas (*reneging*) es la siguiente. Se supone que la impaciencia de la clase i es caracterizada por una tasa de renuncia k_i , con $k_m > k_m'$, para $m' > m$, esto es, la tasa de renuncia del consumidor más impaciente será mayor que la del menos impaciente ($k_1 > k_2$). La probabilidad de que un consumidor se vaya sin ser servido antes del momento t dado que hay n individuos en la empresa en el momento cero viene dada por (3). Koenigsberg propone para k_i la expresión (4) añadiendo los subíndices correspondientes. La forma exacta de k_i no es importante, pero el signo de las derivadas debería ser:

$$\frac{\partial k_i}{\partial v_i} > 0; \quad \frac{\partial k_i}{\partial p_i} > 0; \quad \frac{\partial k_i}{\partial p_a} < 0; \quad \frac{\partial k_i}{\partial (L_a/\mu_a)} < 0.$$

En estos modelos el sistema de disciplina de la cola es establecido por la empresa al seleccionar los precios y las reglas de prioridad; los consumidores, dados los precios para las distintas clases de prioridad, calculan sus tamaños de cola críticos o sus tasas de renuncia. De este modo, al cambiar los precios el monopolista cambia las tasas de llegada para las distintas clases de consumidores.

2.2. Modelización de la Empresa: Cuotas de Mercado y Función de Demanda

Bajo un comportamiento *balking* (rechazo de entrada) de los consumidores, la empresa (el sistema, en términos de teoría de colas) tendrá un límite absoluto B sobre el número total de consumidores esperando o siendo servidos y, por tanto, vendrá modelizada por una cola M/M/1/B (De Vany, 1976), donde $B < \infty$ y $\rho = \lambda/\mu \neq 1$. Para un estudio con más detalle de esta cola ver Gross y Harris (1998).

La *cuota de mercado* de la empresa, esto es, la proporción de llegadas que deciden obtener el servicio de la empresa monopolista, que denotamos por r , es

$$r = 1 - \beta = \frac{1 - \rho^B}{1 - \rho^{B+1}}. \quad (5)$$

y

$$\beta = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{B+1}} \rho^B \quad (6)$$

donde β es la probabilidad de que un individuo decida no entrar, esto es, la probabilidad de que haya B individuos en el sistema. Se puede interpretar β como la proporción de llegadas, a largo plazo, que deciden no comprar en la empresa.

La *demanda media efectiva*, esto es, el número medio de consumidores que efectivamente compran el servicio en la empresa monopolista, λ' , por tanto, es⁵

$$\lambda' = \lambda(1 - \beta) = \lambda r. \quad (7)$$

Teniendo en cuenta la dependencia de β con $\lambda(p)$, μ y B , se puede escribir

$$\lambda' = \lambda'(p, \mu, B) = \lambda(p) \{1 - \beta[\lambda(p), \mu, B]\} \quad (8)$$

De este modo se observa que la tasa media de equilibrio de la demanda efectiva no es solamente una función del precio monetario, como λ , sino que además depende de la capacidad y del valor crítico de rechazo B . Por otro lado, se pone de manifiesto que la empresa, si alcanza el equilibrio estacionario, se enfrenta a un exceso de demanda dado que $\lambda' < \lambda$ para valores finitos de B . La empresa, además, tiene un exceso de capacidad dado que se verifica $\rho' = \rho(1 - \beta) = \lambda'/\mu < 1$ ⁶.

Si el comportamiento del consumidor fuera del tipo *reneging* (renuncia al servicio), como el considerado por Koenigsberg (1980), el sistema de colas a utilizar sería M/M/1 con *reneging*. En este caso para obtener la cuota de mercado r , en régimen estacionario, se recurre a la condición de equilibrio

$$\lambda r = \mu(1 - P_0), \quad (9)$$

donde P_0 es la probabilidad de que no haya consumidores, ni esperando ni siendo servidos, en la empresa. Esta expresión establece que la demanda media efectiva (λr) es igual al output medio efectivo, y de ahí se obtiene

$$r = \frac{(1 - P_0)}{\rho} = \frac{1 - \frac{1}{F_1(1, b; y)}}{\rho} \quad (10)$$

donde $\rho = \lambda/\mu$; $\beta = \mu/k$; $y = \lambda/k$; ${}_1F_1(a, b; y)$ es la función confluyente hipergeométrica (Abramowitz y Stegun, 1965), dada por

$${}_1F_1(a, b; y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b+n)} \left(\frac{y^n}{n!} \right) \quad (11)$$

donde $\Gamma(z)$ es la integral euleriana gamma.

5. Nótese que $\lambda(p)$ es la tasa media de llegadas de consumidores que quieren comprar al precio p , siempre que encuentren menos de B consumidores en el sistema, de ahí que se le denomine, también, función de demanda potencial.

6. $\rho' < 1$ es un resultado estándar de la teoría de colas.

2.3. Análisis Económico

En esta sección recogemos el análisis económico más destacado que se deriva de los modelos anteriores. Expondremos el análisis económico en el caso *balking* (rechazo de entrada) siendo, sin embargo, el del caso *reneging* (renuncia al servicio) similar, pero sustituyendo la dependencia respecto al valor crítico B por la dependencia respecto a la tasa de renuncia k .

Para obtener el equilibrio del mercado en el modelo de monopolio con *balking* De Vany (1976) recurre al supuesto de maximización de los beneficios esperados. Para ello, sea C una función de coste esperado definida sobre todo λ' y μ tal que $\lambda' < \mu$,

$$C = C(\lambda', \mu). \quad (12)$$

La derivada $C_{\lambda'} > 0$ es el coste marginal del output medio. La derivada $C_{\mu} > 0$ es el coste marginal de un mayor nivel de la capacidad media planeada.

La expresión para los beneficios esperados viene dada, por tanto, por

$$E(\pi) = p\lambda'(p, \mu, B) - C[\lambda'(p, \mu, B), \mu], \quad (13)$$

y es supuesta cóncava en p y μ . Las condiciones de primer orden para la maximización de $E(\pi)$ con respecto a p y μ son:

$$p: (p - C_{\lambda'})[(1 - \beta)\lambda_p - \lambda(p)\beta_p] + \lambda(p)(1 - \beta) = 0 \quad (14)$$

$$\mu: -(p - C_{\lambda'})\lambda(p)\beta_{\mu} - C_{\mu} = 0. \quad (15)$$

Las expresiones (14) y (15) son entendidas como las condiciones de corto y largo plazo, respectivamente. La ecuación (14) es una condición de corto plazo en el sentido de que el tamaño del sistema de la planta es fijo y los cambios en el output son realizados a través del precio. A partir de la condición de corto plazo se obtiene

$$p\left(1 - \frac{1}{\epsilon'}\right) = C_{\lambda'} \quad (16)$$

donde ϵ' es la elasticidad precio de la demanda efectiva $-\lambda'_p p / \lambda'$. Este es un resultado tradicional del monopolio en el que el ingreso marginal iguala el coste marginal y el precio es establecido en la parte elástica de la curva de demanda ($\epsilon' > 1$), de tal forma que es superior al coste marginal. Es importante hacer notar, sin embargo, que el coste marginal relevante es estrictamente el coste a corto plazo, puesto que $C_{\lambda'}$ es el incremento en el coste dejando la capacidad fija, y por tanto la condición (16), a diferencia del modelo estándar, es una condición de corto plazo.

La ecuación (15), que se ha identificado como una condición de largo plazo, indica que la capacidad es extendida hasta el punto en el que el ingreso neto marginal de la capacidad iguala a su coste marginal. A partir de ella, se obtiene

$$p = C_{\lambda'} + \frac{C_{\mu}}{\lambda'_{\mu}}. \quad (17)$$

Este resultado establece que el precio iguala al coste marginal de largo plazo del output. Se obtiene por tanto que el precio del monopolista contiene un cargo por el coste marginal a corto plazo del output y un cargo adicional por la capacidad siempre que tome la forma de un cargo por la congestión impuesta al sistema, esto es, el coste de la capacidad necesaria para inducir un incremento de una unidad en la demanda media efectiva. De Vany (1976) demuestra, por tanto, que el precio iguala al coste marginal a largo plazo, lo que sugiere que el resultado del monopolio es eficiente.

Por otro lado, la tasa de servicio óptima para una empresa de servicios en régimen de monopolio ha sido caracterizada por Kalai, Kamien y Rubinovitch (1992). Una empresa con un tiempo medio de servicio pequeño tendrá un número medio de consumidores servidos mayor que con un tiempo medio de servicio grande. Consecuentemente, si todos los consumidores pagan lo mismo, cuanto más rápido sea el servicio mayores ingresos tendrá ya que servirá a más individuos por término medio. Pero, a su vez, incurre también en mayores costes. Por lo tanto, una empresa monopolista que busque maximizar el beneficio, se enfrentará a un tradeoff entre ingresos y costes. Bajo los supuestos adecuados sobre costes e ingresos, este tradeoff conduce a un problema simple de optimización. Por otro lado, cualquier tasa de servicio que exceda la tasa de llegada no incrementará el número de consumidores que capture e incrementará los costes. De ahí, planteando un problema sencillo de optimización, se obtiene que si un monopolista busca sólo maximizar beneficios no suministrará un servicio rápido, sino que lo suministrará a la tasa más lenta que le sea rentable que no supere a λ .

3. El duopolio

Son distintos los problemas que se pueden estudiar en competencia duopolística utilizando la teoría de colas. Por un lado, interesa el equilibrio del mercado. Para ello Koenigsberg (1980) examina el comportamiento de un duopolio en términos de un modelo estocástico en el cual las empresas tienen tres parámetros de control: precio, capacidad y una estimación de la calidad. El modelo, por una parte, para un conjunto dado de variables de control determina las cuotas de mercado y, por otra, dada la forma de las funciones de coste de las empresas, determina los valores óptimos de los parámetros en el corto y en el largo plazo.

Koenigsberg describe el duopolio mediante un sistema de colas con dos servidores en paralelo y colas separadas. Además establece la posibilidad de que los consumidores puedan cambiar de cola, comportamiento conocido en teoría de colas como *jockeying* o cambio de cola. De esta forma, cada empresa posee una tasa de cambio de cola, $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$, definidas de forma similar a la tasa de renuncia en un modelo de monopolio con renegeing [ver (4)].

La solución estacionaria para este sistema de colas fue obtenida por Koenigsberg (1966), siendo descrito este sistema como "a route-changing jockeying system". A partir de ella es posible obtener la cuota de mercado de cada empresa y la demanda efectiva. Del estudio de la cuota de mercado se deriva que ésta, r_1 , es muy sensible a k_1 . La Figura 1 muestra la cuota de mercado de la empresa 1 como una función del cociente k_2/k_1 . En ella se puede observar como pequeñas diferencias alrededor de $k_2/k_1 = 1$ dan lugar a un cambio grande en la cuota de mercado potencial. Pequeños cambios de precios o pequeños cambios en las esperanzas de la calidad del servicio pueden, por tanto, ser significativos. Este modelo permite, pues, estudiar el caso de una industria con precios regulados (fijos) donde las empresas sólo pueden competir en el corto plazo en calidad de servicio -que puede ser entendida como la esperanza del coste del tiempo de esperar y ser servidos. De ahí que k_1 y, por tanto, la probabilidad de cambiar sea, en este caso, una función de la calidad de servicio en la empresa j .

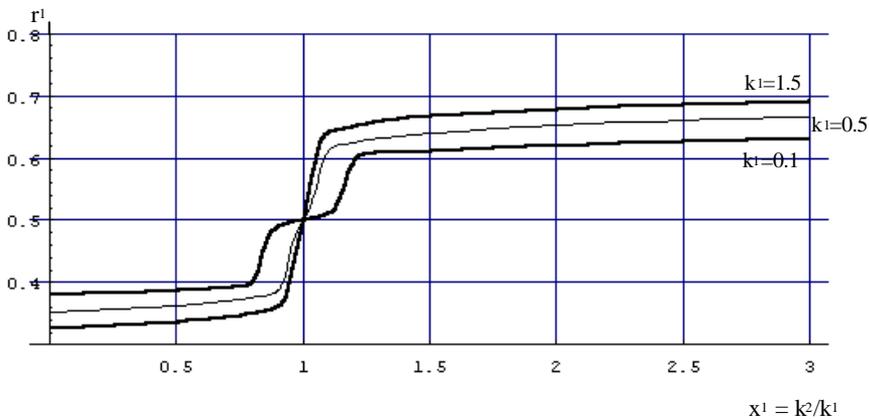


Figura 1: Cuota de mercado de la empresa 1 en función de x_1 para distintos valores de k_1 . Nota: $\lambda_1 = 1$, $\mu_1 = 3/2$, $\rho_1 = 2/3$, $\lambda_2 = 1$, $\mu_2 = 3/2$, $\rho_2 = 2/3$.

Por otro lado, en el estudio de la competencia duopolística también interesa la determinación de la tasa óptima de servicio, realizada por Kalai, Kamien y Rubinovitch (1992). En presencia de un competidor, dado que un consumidor que esté esperando puede ser perdido a favor de dicho competidor, la determinación de la tasa óptima de servicio es más complicada que el simple problema de optimización estudia-

do en el caso del monopolio. Ahora el beneficio de la empresa no depende sólo de su propia tasa media de servicio sino también de la tasa de su competidor -la teoría de colas permite especificar la cuota de mercado de cada empresa en función de las tasas de servicio de ambas y a partir de ella determinar la función de demanda efectiva⁷. De este modo, Kalai y otros se preocupan de un aspecto específico de la competencia duopolística: la competencia en velocidad de servicio como un medio para capturar una mayor cuota de mercado y maximizar el beneficio esperado por unidad de tiempo a largo plazo.

Kalai y otros diseñan, sin embargo, un comportamiento del consumidor más simple que Koenigsberg (1980). Existe una única cola común a ambas empresas, de tal forma que los consumidores eligen, de acuerdo con el criterio FCFS, la primera empresa que quede ociosa y si ambas están ociosas, entonces, eligen aleatoriamente una de ellas.

Li y Lee (1994) desarrollan también un modelo de competencia duopolística basada en el tiempo. Consideran que las preferencias de los consumidores dependen del precio monetario (p), la calidad (Q) y la velocidad de entrega (W); y que aquellos se comportan estratégicamente a la hora de tomar su decisión de compra en una u otra empresa, eligiendo aquella que maximice su utilidad esperada, $E[U(\cdot)]$

$$\max E[U(V_j, W_j) | \mathfrak{S}_t]$$

donde

$$U(V_j, W_j) = \begin{cases} V_j - rW_j & \text{si } V_j \geq \bar{V}; \\ -\infty & \text{resto,} \end{cases}$$

$$V_j = V(Q_j, p_j) \quad \frac{\partial V_j}{\partial Q_j} > 0; \quad \frac{\partial V_j}{\partial p_j} < 0.$$

Donde V_j es la valoración del servicio ofrecido por la empresa j , que depende positivamente de la calidad y negativamente del precio monetario; W_j es el tiempo de entrega de la empresa j ; \mathfrak{S}_t es la información disponible por el consumidor en el momento t ; t es el momento inmediato anterior a la realización de un pedido en el cual el consumidor tiene que elegir una empresa; r el valor unitario del tiempo; y \bar{V} es el valor de reserva tal que los consumidores rechazarán una empresa cuyo servicio sea valorado por debajo de \bar{V} .

Dado el comportamiento de elección dinámico del consumidor y haciendo uso de técnicas de la teoría de colas Li y Lee derivan la cuota de mercado y tasa de demanda de cada empresa como una función de las decisiones de las empresas sobre el precio, calidad y velocidad de procesamiento. Diseñan, así, un modelo que trata la

7. Esta situación puede verse como un juego estratégico (no cooperativo) entre empresas (servidores). Cada empresa busca maximizar su beneficio esperado escogiendo estratégicamente su tasa de servicio.

elección óptima del precio, calidad y capacidad de respuesta de una empresa en presencia de incertidumbre y competencia. Además, se puede observar que el equilibrio tradicional de Bertrand es un caso particular de su modelo cuando los consumidores no valoran el tiempo de entrega.

Este modelo recoge un aspecto interesante de la competencia duopolística que es mostrado en la Figura 2. En este gráfico se representa la cuota de mercado de la empresa i , γ_i , en función de la valoración de su servicio por parte de los consumidores, V_i . La empresa i , además, posee una tasa de servicio más alta (es más rápida) que su competidor, esto es, $\mu_i > \mu_j$. El tramo (A) es el tramo de la cuota de mercado de la empresa i cuando la empresa j es estrictamente preferida y el tramo (B) cuando la empresa i es estrictamente preferida⁸ a la empresa j . No necesariamente el tramo (B) debe quedar siempre por encima del 50 % y el tramo (A) por debajo, como en el ejemplo, dependerá de las tasas de servicio y de la tasa de llegada⁹.

En la Figura 2 se puede observar que si los servicios de ambas empresas son valorados de la misma forma entonces la empresa con mayor tasa de servicio captura una cuota de mercado mayor (punto D de la Figura 2). Pero, además, la empresa con una tasa de servicio mayor puede obtener una mayor cuota de mercado incluso cuando los consumidores valoran en menor medida su servicio, esto es, cuando $V_i < V_j$ (puntos comprendidos entre C y D en la Figura 2). Por ejemplo, la cuota de mercado de la empresa i es del 55.97% cuando $V_i = 3.9583$, $V_j = 4$ y $\mu_i \geq \mu_j$. Esto es, a pesar de que los consumidores valoran en menor medida el producto de la empresa i ésta consigue una cuota de mercado superior al 50% frente a su rival debido a que su tasa de servicio es mayor.

Algunos modelos de duopolio adicionales, cuyo interés se centra en el estudio de la optimalidad del precio de equilibrio desde el punto de vista social, son Loch (1994a y b) y Stenbacka y Tombak (1995).

4. La competencia perfecta

La competencia perfecta es una estructura de mercado que viene caracterizada principalmente por dos supuestos: la existencia de un número elevado de empresas y consumidores; y la homogeneidad del producto. Estos supuestos, juntos, implican que la empresa es tomadora del precio o precio-aceptante, es decir, no puede influir en los precios de mercado y, por tanto, debe aceptarlos como dados.

8. Se entiende que una empresa es estrictamente preferida cuando, libres de congestión ambas, el consumidor decide siempre comprar en ella.

9. Las distintas posibilidades gráficas se pueden ver en Parra (1997).

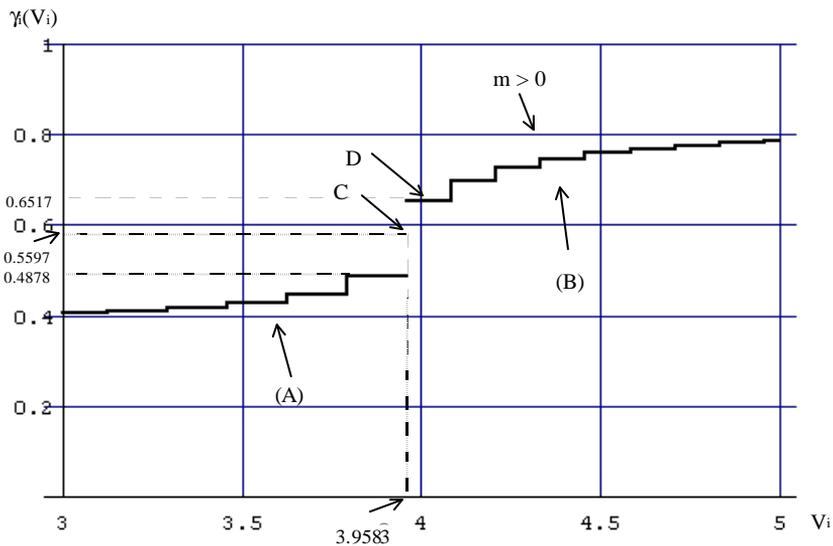


Figura 2: Cuota de mercado de la empresa i , $\gamma_i(\cdot)$, en función del valor independiente del tiempo V_i . (NOTA: $\lambda=5$, $\mu_i=4$, $\mu_j=3$, $V_j=4$, $r=0.5$).

La versión estocástica de este supuesto sería la siguiente: las empresas son tomadoras del precio completo de tal forma que pueden vender cualquier nivel de output deseado al precio completo esperado de mercado, esto es, pueden tener cualquier número esperado de llegadas de consumidores que deseen simplemente ofertando la capacidad apropiada. Sin embargo, el hecho de que las empresas sean tomadoras del precio completo no implica que también lo sean del precio monetario. Efectivamente, una empresa puede tener cualquier precio monetario que elija, dentro de un conjunto factible, pero tiene que aceptar el impacto del mercado resultante sobre su demanda puesto que su tiempo de entrega tiene que ajustarse hasta que su precio completo coincida con el precio completo del mercado.

Dado que la restricción del precio completo esperado tiene que ser satisfecha en el equilibrio, sólo dos de las tres variables de elección -precio, demanda y capacidad- son independientes. De ahí, dependiendo del par de variables que elija la empresa, ésta se puede convertir en decisor de calidad y tomador del precio monetario; o en decisor del precio monetario y tomador de la calidad. En cualquier caso, el mecanismo subyacente viene determinado por la tasa de llegadas de la empresa, esto es, la tasa de llegadas se ajusta de tal forma que ninguna acción de la empresa puede traducirse en una desviación del precio completo esperado determinado por el mercado.

Estos modelos competitivos describen el comportamiento de la empresa mediante una cola con un único canal y estudian la elección competitiva de las variables de

control de la empresa sujeta, además, a la restricción del precio completo esperado del mercado.

De Vany y Saving (1977) proponen un modelo de colas para la industria del transporte en el que estudian la determinación del precio de equilibrio, tiempo de espera, capacidad y producción para una empresa de transporte por camión que opera en varios mercados siendo uno de ellos dominante; y para la industria dentro de un marco competitivo bajo incertidumbre.

De Vany y Saving (1980) proponen un modelo competitivo para la gestión de las autopistas bajo incertidumbre. Derivan, por un lado, los resultados clásicos de la fijación eficiente de precios en las autopistas en un ambiente que es más realista que en otros estudios y, por otro lado, los niveles de capacidad eficiente. Se estudia el funcionamiento de las autopistas en un contexto competitivo para derivar los peajes eficientes que cada usuario debería pagar, siendo indiferente si la competencia es factible o no en el suministro de autopistas, puesto que los precios eficientes que se deriven deberían ser impuestos por la autoridad de la autopista que busque maximizar el bien público, aquí interpretado como la distribución eficiente de los recursos.

De Vany, Gramm, Saving y Smithson (1983) estudian, sin embargo, los mercados competitivos considerando que el tiempo de espera constituye un input suministrado por el consumidor. Una de las características básicas de las industrias de servicios es que el consumidor tiene que invertir parte de su tiempo para obtener el servicio. El tiempo y una buena voluntad para ofrecer tiempo puede convertirse en un determinante fundamental para la organización de la producción y del coste del servicio, de ahí que pueda considerarse dicho tiempo como un input suministrado por el consumidor. De este modo De Vany y otros investigan la hipótesis de que la producción de la industria de servicios responda a un esfuerzo cooperativo, como consecuencia del uso de ambas clases de inputs (los suministrados por empresas y por los consumidores).

Por otro lado, De Vany y Saving (1983) desarrollan un modelo de determinación de la calidad donde las condiciones usuales de equilibrio competitivo se mantienen. En el equilibrio la empresa parecerá un competidor monopolístico, pero una vez que se impone calidad constante se obtienen los resultados usuales de la competencia perfecta.

Por último, Davidson (1982, 1988) estudia la naturaleza del equilibrio en las industrias de servicios, esto es, está interesado en mercados donde el tiempo de espera y el tiempo de servicio juegan un papel fundamental. El primer objetivo de Davidson es investigar cómo distribuye el mercado a consumidores con preferencias de tiempo diferentes en este tipo de industrias, prestando una particular atención al hecho de que la respuesta depende de la cantidad de información que se suponga que tienen los consumidores.

Los distintos modelos proporcionan una visión de la determinación competitiva de precios que difiere de la visión estándar, que no tiene en cuenta el suministro compe-

tivo de la calidad del servicio. Se obtiene que una industria competitiva fija precios que incluyen el coste marginal más un cargo que refleja el valor del tiempo marginal de obtención del servicio. Este segundo cargo puede justificarse por el hecho de que el incremento del tiempo de permanencia incrementa, por ejemplo, los costes de mantenimiento de inventarios en el caso de la industria de transporte, etc. y, en general, es considerado un cargo por la congestión impuesta sobre la empresa. En efecto, la empresa no permite que su capacidad sea tratada como una fuente de acceso gratuito por parte de los consumidores y, por tanto, exige un cargo por la congestión sobre cada usuario de su capacidad igual al coste marginal del tiempo esperado de obtención del servicio. Este coste del tiempo de obtención del servicio está directamente relacionado con el valor del tiempo de los consumidores.

De este modo se observa que, en el equilibrio competitivo, los precios relativos difieren de los costes marginales relativos y, sin embargo, no se está practicando una política discriminatoria de precios, en contra de lo que establece el modelo estándar. En este sentido, Olson (1972) utilizó la evidencia de que los precios relativos diferían de los costes marginales relativos para concluir que la industria del transporte no era competitiva, conclusión considerada errónea por De Vany y Saving (1977).

Tabla 1: Notación

CMg ^c : Coste marginal completo.	CMgD: Coste marginal directo (C_{λ}).
CM ^c : Coste medio completo (CMCC + vW).	CMD: Coste medio directo (C/λ).
CMgC: Coste marginal con calidad C: constante ($C_{\lambda} + \lambda'vW_{\lambda}$).	D: Curva de demanda con calidad variable para una capacidad μ^0 .
CMCC: Coste medio con calidad constante.	IMg: Ingreso marginal correspondiente a D.

La existencia de beneficios esperados nulos implica que el coste medio iguala el coste marginal con calidad constante, siendo el primero minimizado en el output de equilibrio. Cuando se permite que la calidad varíe entonces el mínimo del coste medio completo (CM^c) coincide con el precio completo

$$\text{mín } CM^c = p + vW = P. \quad (18)$$

De este modo, la empresa produce a una tasa de output que minimiza la suma de los costes directos (de producción) e indirectos (de espera) para el nivel de equilibrio de la capacidad (ver Figura 3).

En la Figura 3 se representa gráficamente el equilibrio de la empresa. La curva de demanda con calidad variable para un nivel de capacidad μ^0 se denomina D . La curva de demanda con calidad constante es una línea horizontal en p , que está definida para un tiempo de permanencia esperado fijo y de ahí que descanse por debajo de P en una cantidad vW ; es generada variando μ y dejando λ' que se ajuste para mantener W . Tenemos, por tanto, tres curvas de demanda y una de ingreso marginal, con ingreso medio igual al ingreso marginal para las curvas P y p . Obsérvese que $IMg=CMgD$ y $p=CMD$ en el output de equilibrio λ'^* , aparentemente dando un equilibrio de competencia monopolística (ver Tabla 1 para la notación). Sin embargo, se ha ignorado el coste de espera al considerar sólo las curvas de costes directos de la empresa.

Se obtiene además $p=CMgCC$ en el equilibrio. La curva denominada $CMCC$, "coste medio con calidad constante", es el coste de los inputs necesarios para proporcionar un nivel de capacidad que mantenga el coste de espera en la diferencia entre el precio completo y el precio monetario. En el equilibrio de largo plazo $p = CMCC$, indicando que la curva de demanda con calidad constante es tangente a la curva de

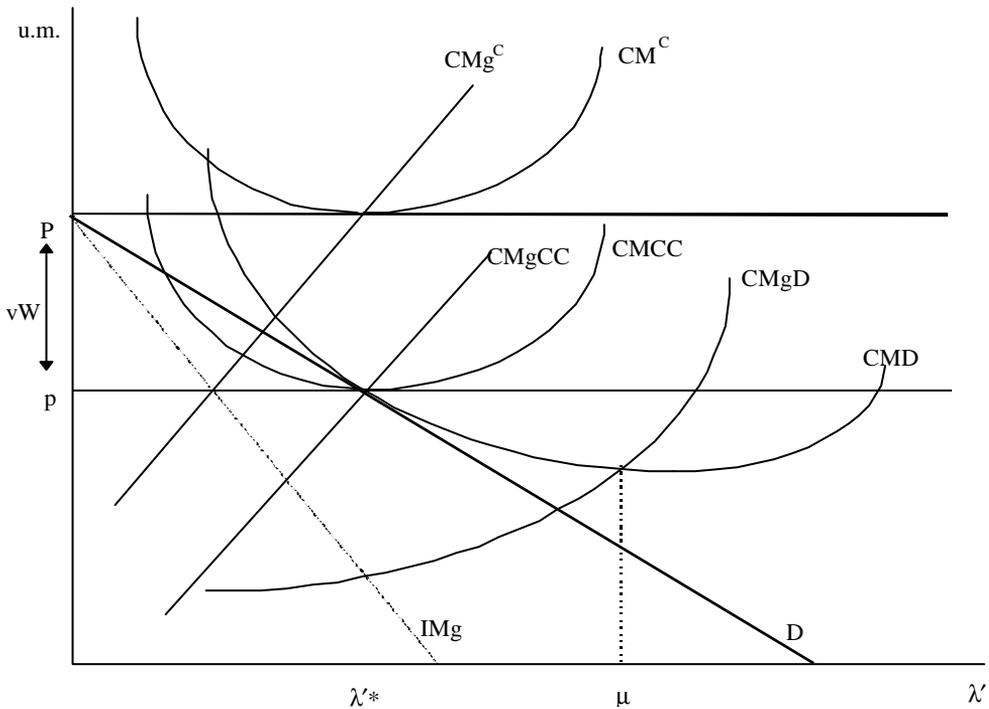


Figura 3: Equilibrio de la empresa.

Fuente: De Vany y Saving (1983).

coste medio con calidad constante en el mínimo de ésta. De este modo se observa que cuando se mantiene la calidad constante el resultado tiene una visión más competitiva -no sorprendente puesto que el output se supone que es de calidad constante en el modelo competitivo usual.

La curva denominada CM^c , el "coste medio completo", es la suma de los costes medios directos e indirectos ($CM^c = CMCC + vW$); la curva CM^c tiene forma de U y tiene un mínimo en λ'^* (donde $CM^c = CMg^c$). La curva de demanda dada por el precio completo es tangente a la curva del coste medio completo en el mínimo de ésta. El equilibrio es eficiente y las curvas tradicionales representan mal este hecho porque no contienen toda la información relevante teniendo en cuenta coste y calidad.

Demsetz (1964) llegó a este punto en un marco distinto. De Vany y Saving (1983) muestran que la incertidumbre y el coste de espera constituyen un mecanismo explícito que causan los efectos de calidad que aquél describió.

5. Conclusiones

Las conclusiones generales que se obtienen de la utilización de la teoría de colas en la modelización de las estructuras de mercado son las siguientes:

1. Los distintos modelos que han sido estudiados tienen como aportación fundamental el mostrar el funcionamiento de las distintas estructuras de mercado en el área de la incertidumbre y la congestión.

2. Todos estos modelos presentan una forma alternativa de describir la interacción entre los compradores y vendedores. Introducen otros factores además del precio. En particular, definen la función de utilidad del comprador como una función del precio y calidad del servicio.

3. Este tipo de modelos ofrecen una visión de la interrelación entre la demanda, utilización de la capacidad y calidad del producto.

4. Cuando los consumidores son impacientes y existen elementos estocásticos en su demanda entonces la capacidad de la empresa se convierte en un argumento de la función de demanda efectiva.

5. Desde el punto de vista económico los resultados obtenidos van a diferir de los resultados tradicionales debido al hecho de que se ha tenido en cuenta explícitamente el efecto de la demanda de la empresa sobre la calidad, definida a partir del tiempo de obtención del servicio.

La utilidad de la teoría de colas desde el punto de vista de la teoría económica no se agota aquí, sino que es posible ampliar este estudio. En este sentido, el monopolio multiproducto o multiplanta no ha sido estudiado bajo este enfoque. Es posible tratar el caso de una empresa monopolista que oferta dos tipos de servicios diferenciados

únicamente por su calidad. Por otro lado, el uso de las *redes de colas* permite la modelización de sistemas económicos más complejos. Se puede observar, además, que un área de gran interés y reciente desarrollo es el estudio de la competencia en tiempo (de servicio o de entrega) a través de los modelos de congestión (ver Stenbacka y Tombak (1995) -en su estudio no utilizan explícitamente expresiones de la teoría de colas, pero algunos de sus supuestos los justifican apoyándose en la misma-, Daniel (1995) y So y Tang (1996)).

Finalmente, en los modelos de mercado que hemos revisado el objetivo de los consumidores no tiene en cuenta las externalidades del consumo. Esta suboptimalidad de las decisiones individuales es la que ha motivado que exista un interés por la búsqueda de métodos de regulación del proceso de llegada, la demanda, de tal forma que las decisiones de los consumidores conduzcan, además, a la maximización de una función de bienestar social. Este interés tiene su origen en Naor (1969). Posteriormente encontramos los estudios de Mendelson y Whang (1990), Loch (1994b) y Hassin (1995), entre otros.

Bibliografía

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, Y. (1965): *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover.
- BLACKBURN, J. (1991): *Time Based Competition*, Richard Irwin, Homewood, IL.
- BLINDER, A. (1991): "Why are Prices Sticky? Preliminary Results from an Interview Study", *American Economic Review*, Vol. 81, pp: 89-96.
- CARLTON, D. (1989), "The theory and the Facts of How Markets Clear: Is Industrial Organization Valuable for Understanding Macroeconomics?", *Handbook of Industrial Organization*, Vol. I, R. Schmalensee and R.D. Willig (eds.), Elsevier Science Publishers B.V., pp: 909-946.
- DANIEL, J. I. (1995): "Dispersion and Waiting Time Dispersion among Service Firms." Working Paper, College of Business and Economics, University of Delaware.
- DAVIDSON, C. (1982): "Equilibrium in Oligopolistic Service Industries: An Economic Application of Queuing Theory." Social Systems Research Institute Workshop Series Paper no. 8217. University of Wisconsin-Madison.
- DAVIDSON, C. (1988): "Equilibrium in Servicing Industries: An Economic Application of Queuing Theory." *Journal of Business*, Vol.61(3), pp: 347-367.
- DE VANY, A. S. (1976): "Uncertainty, Waiting Time, and Capacity Utilization: A Stochastic Theory of Product Quality". *Journal of Political Economy*, June, Vol. 84 (3), pp: 523-541.
- DE VANY, A. S.; FREY, N. G. (1979): "Price Stability Order Backlogs and the Value of Capacity in the Steel Industry", mimeo., Simon Fraser University, noviembre.

- DE VANY, A. S.; GRAMM, W. L.; SAVING, T. R.; SMITHSON, C. W. (1983): "Production in a Service Industry Using Customer Inputs: A Stochastic Model." *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 65 (1), pp: 149-153.
- DE VANY, A. S.; SAVING, T. R. (1977): "Product Quality, Uncertainty and Regulation: The Trucking Industry." *The American Economic Review*, Vol. 67(4) September, pp: 583-594.
- DE VANY, A. S.; SAVING, T. R. (1980): "Competition and Highway Pricing for Stochastic Traffic." *Journal of Business*, Vol. 53 (1), pp: 45-60.
- DE VANY, A. S.; SAVING, T. R. (1983): "The Economics of Quality." *Journal of Political Economy*, Vol. 91 (6), pp: 979-1000.
- DEACON, R.; SONSTELIE, J. (1985): "Rationing by Waiting and the Value of Time: Results from a Natural Experiment", *Journal of Political Economy*, Vol. 93, pp: 627-647.
- DEMSETZ, H. (1964): "The Welfare and Empirical Implications of Monopolistic Competition." *Economic Journal*, Vol 74, September, pp: 623-641.
- EDELSON, N. M.; HILDEBRAND, K. (1975): "Congestion Tolls for Poisson Queueing Processes." *Econometrica*, Vol. 43, pp: 81-92.
- ERLANG, A. K. (1909): "The Theory of Probabilities and Telephone Conversations". *Nyt Tidsskrift Matematik, B.*, Vol. 20, pp: 33-39.
- GROSS, D.; HARRIS, C. M. (1998): *Fundamentals of Queueing Theory*. John Wiley and Sons, 3ª edición, New York.
- HASSIN, R. (1995): "Decentralized Regulation of a Queue." *Management Science*, Vol. 41 (1), 163-173.
- HAVIV, M. (1991): "Stable Strategies for Processor Sharing Systems." *European Journal of Operational Research*, Vol. 52, pp: 103-106.
- HIRSHLEIFER, J.; RILEY, J. G. (1979): "The Analytics of Uncertainty and Information: An Expository Survey." *Journal of Economic Literature*, Vol. 17, pp: 1375-1421.
- KALAI, E.; KAMIEN, M. I.; RUBINOVITCH, M. (1992): "Optimal Service Speeds in a Competitive Environment." *Management Science*, Vol. 38 (8), August, pp: 1154-1163.
- KOENIGSBERG, E. (1966): "On Jockeying in Queues". *Management Science*, Vol. 12, January, pp: 412-436.
- KOENIGSBERG, E. (1980): "Uncertainty, Capacity, and Market Share in Oligopoly: A Stochastic Theory of Product Quality." *Journal of Business*, Vol 53 (2), pp: 151-164.
- KOENIGSBERG, E. (1985): "Queue Systems with Balking: A Stochastic Model of Price Discrimination." *RAIRO, Recherche Opérationnelle/Operations Research*, Vol 19 (3), août, pp: 209-219.
- LI, L.; LEE, Y. S. (1994): "Pricing and Delivery-time Performance in a Competitive Environment." *Management Science*, Vol. 40 (5), May, pp: 633-646.

- LIPPMAN, S. A.; MCCALL, J. J. (1976): "The Economics of Job Search: A Survey." *Economic Inquiry*, Vol. 14, June, pp. 155-189.
- LOCH, C. (1994A): "Time Competition is Capability Competition", *INSEAD Working Paper Series*.
- LOCH, C. (1994B): "Incentive Compatible Equilibria in Markets with Time Competition", *INSEAD Working Paper Series*.
- MENDELSON, H. (1985): "Pricing Computer Services: Queueing Effects." *Communications of the ACM*, Vol. 28(3), pp: 312-321.
- MENDELSON, H.; WHANG, S. (1990): "Optimal Incentive-Compatible Priority Pricing for the M/M/1 Queue." *Operations Research*, Vol. 38(5), pp: 870-883.
- NAOR, P. (1969): "The Regulation of Queue Size by Levying Tolls." *Econometrica*, Vol. 37(1), pp:15-23.
- OLSON, J. E. (1972): "Price Discrimination by Regulated Motor Carriers". *American Economic Review*, Vol. 62, June, pp: 395-402.
- PARRA, I. (1997): *Las Estructuras de Mercado Tradicionales bajo la Teoría de Colas*. Trabajo de Investigación de Tercer Ciclo, Universidad de Murcia.
- PNG, I.; REITMAN, D. (1994): "Service Time Competition", *RAND Journal of Economics*, Vol. 25, pp: 619-634.
- ROTHSCHILD, M. (1973): "Models of Market Organization with Imperfect Information: A Survey". *Journal of Political Economy*, Vol. 81, pp: 1283-1308.
- SO, K. C.; TANG, C. S. (1996): "On Managing Operating Capacity to Reduce Congestion in Service Systems." *European Journal of Operational Research*, Vol. 92, pp: 83-98.
- STENBACKA, R.; TOMBAK, M. M. (1995): "Time-Based Competition and the Privatization of Services." *The Journal of Industrial Economics*, Vol. XLIII (4), pp: 435-454.
- STIDHAM, S. JR. (1985): "Optimal Control of Admissions to Queueing System," *IEEE Transactions on Automated Control*, AC-30, pp: 705-713.
- ZIMMERMANN, C. D.; ENELL, J. E. (1993): "Empresas de Servicios". En J. M. Juran y F. M. Gryna (Eds.), *Manual de Control de Calidad*, Vol. II, 4a Edición, McGrawHill/Interamericana de España, S.A.