ÍNDICE

El orden de Lorenz generalizado de orden j, ¿un orden en desigualdad?

RAMOS ROMERO, H.M. y SORDO DÍAZ, M.A.
Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Facultad de CC. EE. y Empresariales. Universidad de Cádiz
Telf.: 956 01 54 06-Fax: 956 01 53 85 • e-mail:hector.ramos@uca.es

RESUMEN

Se prueba en este trabajo que el orden inducido por las curvas de Lorenz generalizadas de orden j sólo debe ser considerado un orden en desigualdad cuando j=1, caso en el que coincide con el orden clásico de Lorenz. Se propone como alternativa un nuevo orden, definido igualmente a partir de las curvas de Lorenz generalizadas de orden j, que satisface para cualquier valor de j el Principio General de Transferencias, requisito único exigible para que un orden tenga la consideración de orden en desigualdad.

Palabras clave: Distribuciones de rentas; desigualdad; orden de Lorenz generalizado de orden j; Principio General de Transferencias.

ABSTRACT

In this paper it is proven that only when j=1 the generalized Lorenz ordering of order j can be considered an inequality ordering, which case coincides with the usual Lorenz ordering. From the generalized Lorenz curves of order j, we propose a new order that satisfies, for each j, the General Principle of Transfers which is the only requirement for it to be considered an inequality order.

Key words: Income distribution; inequality; generalized Lorenz ordering of order j; General Principle of Transfers.

Códigos UNESCO: 120907, 530719, 530240

Artículo recibido el 24 de mayo de 2000. Aceptado el 9 de noviembre de 2000.

1. Introducción

El concepto de desigualdad, en tanto que idea primaria, no es susceptible de definición precisa. Términos como variabilidad, diversidad, dispersión, aleatoriedad y concentración describen, todos ellos, un componente subyacente de desigualdad, por lo que, en cierto sentido, pueden entenderse como distintas manifestaciones del mismo concepto primario.

En Economía, la relación ingresos-bienestar-desigualdad y la comparación y ordenación de distribuciones de renta se abordó inicialmente mediante la definición y uso a tal fin de diferentes medidas que cuantificaban, razonablemente, la desigualdad de una distribución de ingresos. Sin embargo, el uso de diferentes medidas pueden conducirnos a conclusiones contradictorias, por lo que se hace necesario disponer de algún criterio para determinar si una distribución es intrínsecamente más desigual que otra. En este sentido, el orden de Lorenz (véanse Arnold, 1987 y Wolf, 1997) es el procedimiento más usual aunque no el único ya que el orden definido por Shorrocks (1983) (véanse Lambert, 1989 y Ramos et al., 2000) y el dado por Moyes (1987), entre otros, podrían ser utilizados como alternativa. La existencia de diferentes alternativas (no equivalentes) para comparar en desigualdad distribuciones de renta al margen del uso de medidas, pone de manifiesto la existencia de diferentes concepciones de desigualdad.

Dalton (1920), que ya había detectado este problema, intentó resolverlo definiendo una serie de operaciones que, efectuadas sobre distribuciones de rentas, deberían hacer decrecer la desigualdad, dando lugar a los conocidos principios que llevan su nombre. No obstante, sólo el primero de ellos, el denominado Principio de Transferencias, tiene una aceptación que podríamos considerar universal. El Principio de Transferencias indica que "cualquiera que sea el número de perceptores de ingresos y cualquiera la cantidad a la que asciendan las rentas, una transferencia de ingresos entre dos individuos, del más rico al más pobre, siempre que no se invierta el orden relativo de la riqueza, hace disminuir la desigualdad". Cualquier medida de desigualdad y cualquier ordenación de distribuciones atendiendo a su desigualdad debe, para tener tal consideración, ser consistente con el Principio de Transferencias. En cambio, pueden tener distinto comportamiento frente a los otros principios enunciados por Dalton que recogen, respectivamente, la operación de incrementos proporcionales de ingresos y de incrementos iguales de ingresos. De hecho, los órdenes de Lorenz y de Shorrocks presentan distinto comportamiento frente a estos dos últimos principios sin que por ello se cuestione su naturaleza de órdenes en desigualdad. Nos centraremos, por tanto, en el Principio de Transferencias como único criterio compatible con cualquier concepción de desigualdad en el ámbito de las distribuciones de rentas.

El gran inconveniente del Principio de Transferencias de Dalton es que, en los términos en los que está enunciado, sólo es susceptible de ser aplicado cuando estemos considerando una población finita de ingresos y no lo es en el caso más general de una distribución cualquiera de ingresos. Este problema queda solventado por Ariza y Ramos (1995) al enunciar un Principio General de Transferencias que puede ser aplicado a cualquier variable aleatoria y que se expresa en términos de su desigualdad cuando se la somete a una transformación denominada por los autores como α-concentración. El Principio de Transferencias de Dalton se obtiene como caso particular del Principio General de Transferencias. En Ramos y Ariza (1998) los autores prueban la consistencia de los órdenes de Lorenz y Shorrocks con este principio, en el contexto más general de variables aleatorias cualesquiera.

En este trabajo analizaremos desde este prisma una generalización del orden de Lorenz que recibe la denominación de orden de Lorenz generalizado de orden *j* (véase Nygard y Sandstrom, 1981) y probaremos que únicamente en el caso *j* = 1, en el que coincide con el orden clásico de Lorenz, puede ser considerado como un orden en desigualdad. A partir de aquí introduciremos un nuevo orden derivado del anterior que sí debe ser considerado como orden en desigualdad por ser consistente con el Principio General de Transferencias.

2. Definiciones y resultados previos

DEFINICIÓN 2.1

Denotemos por C_j a la clase de variables aleatorias *X* no negativas cuyo j-ésimo momento con respecto al origen EX^j es finito y distinto de cero. Dada una variable aleatoria *X* perteneciente a C_j, con función de distribución *F*, notaremos por L_j^X a su correspondiente curva de Lorenz generalizada de orden j, definida como sigue:

$$L_j^X(p)=\frac{\int_0^p \left[F^{-1}(t)\right]^j dt}{\int_0^1 \left[F^{-1}(t)\right]^j dt}=\frac{\int_0^p \left[F^{-1}(t)\right]^j dt}{EX^j}, \qquad 0\leq p\leq 1$$

donde $L_j^X(0)=0$ y $L_j^X(1)=1$.

Para *j* = 1 se obtiene, como caso particular, la curva de Lorenz ordinaria.

DEFINICIÓN 2.2

Dadas las variables *X* e *Y* pertenecientes a C_j, se dice que *X* es menor que *Y* en el sentido del orden de Lorenz generalizado de orden *j*, y se denota $X \leq_j Y$, si y sólo si $L_j^X(p)\geq L_j^Y(p)$ para todo p $\in$ [0,1].

Para *j* = 1 la definición anterior corresponde al orden de Lorenz ordinario.

Las siguientes definiciones (Ariza y Ramos, 1995) permiten enunciar el Principio General de Transferencias, susceptible de ser aplicado a cualquier variable aleatoria y que se establece como el único criterio compatible con cualquier concepción de desigualdad referida a una distribución de rentas.

ÍNDICE

DEFINICIÓN 2.3

Se llama función de α-concentración a la función $i_\alpha(x)$ definida de la siguiente forma:

$$i_\alpha(x)=\begin{cases}-\alpha, & a\le x\le a+t\\ \alpha, & a+r\le x\le a+r+t\\ \alpha, & b-r-t\le x\le b-r\\ -\alpha, & b-t\le x\le b\\ 0, & \text{en el resto}\end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

siendo $0<\alpha,\ \ 0<t<r,\ \ a+r+t<b-r-t$

DEFINICIÓN 2.4

Llamaremos función de α-concentración acumulada $I_\alpha(x)$ a:

$$I_\alpha(x)=\int_{-\infty}^{x} i_\alpha(z)dz\ .$$

DEFINICIÓN 2.5

Sean X e Y dos variables aleatorias no negativas, con funciones de distribución respectivas F y G. Diremos que la variable Y es una α-concentración de X y se denotará $Y=C_\alpha(X)$, si la función de distribución de Y es el resultado de añadir una α-concentración acumulada a la de X, es decir, si

$$G(x)=F(x)+I_\alpha(x),\ \text{para algún }\ \alpha>0\ .$$

Obsérvese que si $Y=C_\alpha(X)$ y $t=0$, entonces Y se obtiene a partir de X transfiriendo masa de probabilidad desde los valores a y b a dos valores intermedios y equidistantes de ellos. Cuando $t\neq 0$, entonces subyace la misma idea pero teniendo en consideración intervalos en lugar de puntos.

Principio General de Transferencias *(Ariza y Ramos, 1995)*

Toda a-concentración efectuada sobre una variable aleatoria hace disminuir la desigualdad.

Obsérvese que este enunciado no exige que la variable aleatoria sea absolutamente continua. Por otra parte, el Principio de Transferencias de Dalton se obtiene como caso particular del Principio General de Transferencias. En efecto, supongamos una distribución de ingresos, siendo n el número de perceptores. Sean a y b $(a > b)$ los ingresos correspondientes a dos individuos dados. Si el individuo de mayor renta cede r unidades al otro (lo que representa una transferencia en el sentido de Dalton), la operación equivale a efectuar una α-concentración sobre la distribución de ingresos, con $i_\alpha(x)$ definida como en (1), con $t = 0$ y $a = 1/n$.

3. Resultados y conclusiones

LEMA 3.1

Sean X e Y dos variables aleatorias absolutamente continuas y no negativas. Si $Y = C_\alpha(X)$, entonces $EY^j \le EX^j$ para cada $j \in$ **N**, dándose el caso de igualdad cuando j=1.

DEMOSTRACIÓN.

Denotemos por f y g las funciones de densidad respectivas de X e Y. De las definiciones 2.3, 2.4 y 2.5 se deduce que

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - \alpha, & a \le x \le a + t \\ f(x) + \alpha, & a + r \le x \le a + r + t \\ f(x) + \alpha, & b - r - t \le x \le b - r \\ f(x) - \alpha, & b - t \le x \le b \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

siendo $g(x) = f(x)$ en el resto. Por tanto,

$$EY^j - EX^j = \alpha\left(-\int_a^{a+t} x^j dx + \int_{a+r}^{a+r+t} x^j dx + \int_{b-r-t}^{b-r} x^j dx - \int_{b-t}^{b} x^j dx \right) =$$
$$= \frac{\alpha}{j+1}\Big[a^{j+1} - (a+t)^{j+1} + (a+r+t)^{j+1} - (a+r)^{j+1} +$$
$$+ (b-r)^{j+1} - (b-r-t)^{j+1} + (b-t)^{j+1} - b^{j+1}\Big].$$

Para $j \ge 1$, la función

$$h(x) = jx^{j-1} \qquad \textbf{(3)}$$

es no decreciente para $x > 0$. Por tanto, también se verifica que la función

$$k(x) = (x+t)^j - x^j \qquad \textbf{(4)}$$

es no decreciente para $x > 0$, ya que

$$k'(x_0) = j\left[(x_0+t)^{j-1} - x_0^{j-1}\right] \geq 0$$

para cualquier x_0 sin más que tener en cuenta que (3) es no decreciente para $x > 0$. De aquí se deduce que la función

$$p(x) = x^{j+1} - (x+t)^{j+1} + (x+r+t)^{j+1} - (x+r)^{j+1}$$

es no decreciente ya que para cada $x_0 > 0$ se tiene que

$$p'(x_0) = (j+1)\left[x_0^j - (x_0+t)^j + (x_0+r+t)^j - (x_0+r)^j\right] =$$

$$= (j+1)\left[k(x_0+r) - k(x_0)\right] \geq 0$$

donde la última desigualdad es consecuencia de que (4) es no decreciente para $x > 0$. Observemos ahora que

$$EY^j - EX^j = \frac{\alpha}{j+1}\left[p(a) - p(b-r-t)\right] \leq 0$$

por ser $a < b - r - t$ y ser $p(x)$ no decreciente para $x > 0$. En conclusión, $EY^j \leq EX^j$ para todo $j \geq 1$.

Nota: de la demostración del teorema se sigue inmediatamente que, en el caso particular $j = 1$, se tiene que $EX = EY$.

A continuación, probaremos que si $Y = C_\alpha(X)$, entonces la curva de Lorenz generalizada de orden j de X comienza “por debajo” de la correspondiente curva de Y.

TEOREMA 3.2

Sean X e Y dos variables aleatorias absolutamente continuas y no negativas, tales que $Y = C_\alpha(X)$. Entonces, existe $u_0 \in (0,1]$ tal que $L_j^X(u) \leq L_j^Y(u)$ para todo $u \leq u_0$.

DEMOSTRACIÓN.

A partir de (2) observamos que $G(x) < F(x)$ siempre que $x < a + r + t$, por lo que $F^{-1}(u) < G^{-1}(u)$ para todo $u < F(a + r + t)$. Por tanto,

$$\left[F^{-1}(u)\right]^j < \left[G^{-1}(u)\right]^j \text{ para todo } u < F(a + r + t) \text{ y para todo } j \geq 1.$$

En consecuencia, se verifica que

$$\int_0^p \left[F^{-1}(u)\right]^j du < \int_0^p \left[G^{-1}(u)\right]^j du \text{ para todo } p < F(a + r + t).$$

Como, en virtud del lema 3.1, $EY^j \leq EX^j$ para cada $j \geq 1$, se tiene finalmente que

$$L_j^X(p) \leq L_j^Y(p) \text{ para todo } p < F(a + r + t).$$

TEOREMA 3.3

Sean X e Y dos variables aleatorias absolutamente continuas y no negativas, tales que $Y = C_\alpha(X)$. Se verifica que, para $j \geq 2$, las curvas $L_j^X(p)$ y $L_j^Y(p)$ se cortan en algún $u \in (0,1)$.

DEMOSTRACIÓN.

En efecto, de (1) se sigue que $G(x) = F(x)$ para todo $x > b$, o lo que es lo mismo, $F^{-1}(u) = G^{-1}(u)$ siempre que $u > F^{-1}(b) = u_1$.

Así pues, se tiene que

$$\int_{u_1}^{\infty} \left[F^{-1}(u)\right]^j du = \int_{u_1}^{\infty} \left[G^{-1}(u)\right]^j du \quad ,$$

lo que implica que
$$\frac{\int_{u_1}^{\infty} \left[F^{-1}(u)\right]^j du}{EX^j} < \frac{\int_{u_1}^{\infty} \left[G^{-1}(u)\right]^j du}{EY^j} \; ;$$

es decir,
$$\frac{EX^j - \int_0^{u_1} \left[F^{-1}(u)\right]^j du}{EX^j} < \frac{EY^j - \int_0^{u_1} \left[G^{-1}(u)\right]^j du}{EY^j} ,$$

de donde $$\frac{\int_0^{u_1}\left[F^{-1}(u)\right]^j du}{EX^j} > \frac{\int_0^{u_1}\left[G^{-1}(u)\right]^j du}{EY^j},$$

o lo que es igual, $$L_j^X(u_1) > L_j^Y(u_1)$$

y, por la continuidad de las curvas, queda demostrado que se cortan en algún punto $u \in \left(F(a+r+t), u_1\right)$.

COROLARIO 3.4

Para $j \geq 2$, el orden de Lorenz generalizado de orden j no es consistente con el Principio General de Transferencias y, por tanto, no puede tener la consideración de orden en desigualdad.

4. Una alternativa

Proponemos a continuación una ordenación alternativa definida a partir de la curva de Lorenz generalizada $L_j(p)$ que es consistente con el Principio General de Transferencias.

DEFINICIÓN 4.1

Sean X e Y variables aleatorias no negativas y sean L_j^X y L_j^Y, respectivamente, las correspondientes curvas de Lorenz generalizadas de orden j. Para cada j entero positivo se define la relación $\leq_{dj}$ entre X e Y de la siguiente forma:

$$Y \leq_{dj} X \Leftrightarrow \text{ existe } u_0 \in (0,1] \text{ tal que } L_j^X(u) \leq L_j^Y(u) \text{ para todo } u \leq u_0.$$

Con esta definición estamos indicando que una variable X es más desigual (en orden j) que otra variable Y si su correspondiente curva L_j^X *no comienza por encima de* la de Y. Se trata, pues, de un orden total para cada j. En particular, para $j=1$, estaríamos diciendo que X es más desigual que Y si su curva de Lorenz ordinaria no comienza por encima de la de Y o, lo que es igual, que una distribución de rentas X es más desigual que otra distribución Y si los niveles más bajos de rentas son en Y relativamente más altos que en X. Esta interpretación, compatible con una cierta idea de desigualdad, queda refrendada por el siguiente teorema que garantiza la consistencia del orden definido con el Principio General de Transferencias y, en consecuencia, con el único requisito exigible para que podamos hablar, con toda propiedad, de que el orden definido es un orden *en desigualdad*.

TEOREMA 4.2

Dadas X e Y variables aleatorias absolutamente continuas y no negativas, se verifica que la relación $\leq_{dj}$ entre X e Y es consistente con el Principio General de Transferencias.

DEMOSTRACIÓN.

Debemos probar que si $Y = C_\alpha(X)$ entonces $Y \leq_{dj} X$. Para ello basta ver que existe $u_0 \in (0,1)$ tal que $L_j^X(u) \leq L_j^Y(u)$ para todo $u \leq u_0$, lo cual se verifica por el teorema 3.2.

Conclusión: la consistencia con el Principio General de Transferencias nos permite hablar, con toda propiedad, del orden $\leq_{dj}$ como un orden *en desigualdad*. Además puede probarse que el orden $\leq_{dj}$ es también consistente con los principios de incrementos iguales y de incrementos proporcionales, en el mismo sentido que lo es el orden de Lorenz clásico.

5. Ejemplo

Las distribuciones de Pareto y Potencial han sido estudiadas en el contexto de la desigualdad en el sentido de Lorenz y caracterizadas a través de la curva de Lorenz de sus correspondientes distribuciones truncadas en Bhattacharya (1963) y Moothathu (1986), respectivamente. Es bien conocido que la distribución de Pareto describe adecuadamente la distribución de renta entre los *ricos* y los *moderadamente ricos*. Por otra parte, la distribución Potencial es aplicada en el análisis de la pobreza (véase, por ejemplo, Belzunce et al., 1998). Vamos a probar en este ejemplo que, para determinados valores de sus parámetros, ambas distribuciones no son comparables en el orden de Lorenz y, en cambio, siempre lo son en el orden $\leq_{dj}$.

La función de distribución de una variable aleatoria de Pareto con parámetros ε y α es:

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^{-\alpha}, \quad x \geq \varepsilon > 0, \quad \alpha > 0 .$$

Cuando $j < \alpha$, el momento j-ésimo existe y viene dado por:

$$E\left[X^j\right] = \varepsilon^j \frac{\alpha}{\alpha - j} .$$

Es fácil ver que $F_X^{-1}(t) = \varepsilon(1-t)^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad 0 < t < 1$.

A partir de aquí calculamos de forma inmediata la curva de Lorenz generalizada de orden j asociada a X que tiene la siguiente expresión:

$$L_j^X(p) = 1 - (1-p)^{\frac{\alpha - j}{\alpha}}, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad j < \alpha. \qquad \textbf{(5)}$$

Por otra parte, la función de distribución de una variable aleatoria Y que sigue una ley Potencial de parámetros k y b es la siguiente:

$$F_Y(x) = \left(\frac{x}{k}\right)^b, \quad 0 < x < k, \quad b > 0,$$

y el momento j-ésimo viene dado por $E\left[Y^j\right] = \dfrac{bk^j}{b+j}$.

Asimismo, se deduce fácilmente que $F_Y^{-1}(t) = k t^{\frac{1}{b}}, \quad 0 < t < 1.$

A partir de estas dos últimas expresiones se obtiene la de la correspondiente curva de Lorenz generalizada de orden j:

$$L_j^Y(p) = p^{\frac{j}{b}+1}, \quad 0 \leq p \leq 1. \qquad \textbf{(6)}$$

Veremos a continuación que, para determinados valores de los parámetros las distribuciones de Pareto y Potencial no son comparables en el sentido de Lorenz. En efecto, consideremos, como ejemplo, las distribuciones

W ~ Pareto (a,e) con $a = 2$
Z ~ Potencial (b,k) con $b = 1$.

Haciendo j = 1 en (5) y (6) se obtienen las curvas de Lorenz ordinarias correspondientes a W y Z:

$$L_W(p) = 1 - (1-p)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq p \leq 1;$$

$$L_Z(p) = p^2, \quad 0 \leq p \leq 1.$$

Puede comprobarse sin dificultad que $L_W(p)$ y $L_Z(p)$ se cortan en (0, 1), por lo que no son comparables en el sentido de Lorenz. Veamos, sin embargo, que, para cualesquiera valores de los parámetros, la distribución de Pareto es menos desigual que la Potencial en el sentido $\leq_{dj}$.

En efecto, dadas las variables aleatorias X~Pareto (a,e) e Y~Potencial (b,k), se tiene que

$$\lim_{p\to 0^+} \frac{L_j^Y(p)}{L_j^X(p)} = 0 .$$

En consecuencia, para cada j < a, existe un $p_j \in (0,1)$, tal que

$$L_j^Y(p) < L_j^X(p) \text{ para todo } p \leq p_j ,$$

lo que equivale a decir que, para todo j< a, $X \leq_{dj} Y$.

Bibliografía

ARIZA, O. y RAMOS H.M. (1995): α-concentración de una variable aleatoria. Actas del XXII Congreso Nacional de Estadística e I.O. pp.9-10

ARNOLD, B.C. (1987): Majorization and the Lorenz order. A brief introduction. Lectures Notes in Statistics, 43, Springer-Verlag.

BELZUNCE, F., CANDEL, J. Y RUIZ, J.M. (1998): Ordering and asymptotic properties of residuals income distributions. Sankhya, 60, Series B, pp. 331-348.

BHATTACHARYA, N. (1963): A property of the Pareto distribution. Sankhya, 25, Series B, pp. 195-196.

DALTON, H. (1920): The measurement of the inequality of incomes. Economic Journal, 30, pp. 348-361.

LAMBERT, P. (1989): The distribution and redistribution of incomes. Blackwell.

MOOTHATHU, T.S.K. (1986): A characterization of power distribution through a property of the Lorenz curve. Sankhya, 48, Series B, pp.262-265.

MOYES, P. (1987): A new concept of Lorenz domination. Economics Letters, 23, pp. 203-207.

NYGARD, F. y SANDSTROM, A. (1981): Measuring income inequality. Stockholm, Almqvst&Wiksell.

RAMOS , H.M. y ARIZA, O. (1998): El principio general de transferencias en relación con algunas ordenaciones estocásticas. Actas del XXIV Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, pp.113-114.

RAMOS, H.M., OLLERO, J. y SORDO, M.A. (2000): A sufficient condition for Generalized Lorenz order. Journal of Economic Theory, 90, pp. 286-292.

SHORROCKS, A.F. (1983): Ranking Income Distributions. Economica, 50, pp. 3-17.

WOLF, F. (1997): Disparity of Lorenz curves. Hohenheim Writings in Economics, 25, Peter Lang Ed.