ÍNDICE

Estudios de Economía Aplicada
Nº 12, 1999. Págs. 145-164

Equilibrio localización-atractivo para dos competidores con cadenas de centros de servicio igualmente atractivos

SANTOS PEÑATE, D. R.
SUÁREZ VEGA, R.
DORTA GONZÁLEZ, P.
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Esta versión incluye todas las correcciones sugeridas por el evaluador, las cuales nos han parecido oportunas y por las que les quedamos muy agradecidos. Este trabajo ha sido parcialmente financiado con el proyecto PB95-1237-C03-03.

RESUMEN

Se estudia un problema de localización competitiva en redes. Una firma quiere establecer r centros de servicio en un mercado donde otras firmas competidoras ya disponen de p centros. Los centros pueden estar ubicados en cualquier punto de la red y la demanda se concentra en los nodos. La cantidad de demanda de un nodo que es captada por un centro de servicio depende del atractivo de este centro y de la distancia entre el centro y el nodo. La firma desea determinar las localizaciones y los atractivos que le proporcionan el máximo beneficio. En este trabajo se propone un modelo y se estudia este problema, así como el problema del equilibrio localización-atractivo.

Palabras Clave: Localización competitiva, atractivo, equilibrio localización-atractivo.

ABSTRACT

A competitive location problem on networks is considered. A firm wants to establish facilities in a market where competing firms are already operating. The demand captured by a firm is determined by the attractiveness of the facilities and the distance between facilities and demand points. The firm wants to find the locations and attractivenesses that maximize profits. In this paper, a model is proposed, this problem and the equilibrium location-attractiveness are studied.

ÍNDICE

***Key words*: Competitive location, attractiveness, equilibrium location-attractiveness.

Código UNESCO: 1207, 5304

Artículo recibido en noviembre de 1998. Revisado en marzo de 1999.

1. Introducción

En los modelos de localización competitiva, el comportamiento del consumidor ha sido incorporado de varias formas. El criterio más simple para seleccionar un centro de servicio es la distancia (tiempo o coste de desplazamiento); atendiendo a este criterio, el consumidor elige el centro de servicio más próximo. En el problema de máxima captura (MAXCAP) formulado por Revelle (1986) se aplica esta forma de selección. En este caso, el objetivo de la firma que entra en el mercado es maximizar la demanda capturada que equivale, bajo los supuestos de este modelo, a maximizar los beneficios. El criterio de la distancia mínima se ajusta bien al comportamiento del consumidor cuando los centros de servicio no presentan diferencias o cuando el transporte es difícil. Sin embargo, aun cuando los precios coincidan, en la mayor parte de las situaciones, el consumidor toma su decisión atendiendo no sólo a la distancia sino también a otros aspectos de los centros de servicio tales como el tamaño del centro (superficie de venta en el caso de los supermercados), los servicios que ofrece (aparcamientos, aceptación de tarjetas de crédito, etc), y el tiempo de espera; estas características definen el atractivo del centro.

En los modelos basados en funciones de *atracción*, se asume que la demanda en un punto v es atraída hacia un centro en x de acuerdo con una función de atracción *a(v,x)*, dependiente del *atractivo* de este centro, a_x, y de la distancia entre *v* y *x*, d_{vx} . Un ejemplo de función de atracción viene dado por el siguiente modelo de gravedad

$$a(v,x) = a_x^{\alpha} d_{vx}^{-\beta}, \ \alpha \geq 0, \beta \geq 0,$$

donde α y β son parámetros que reflejan la sensibilidad del consumidor hacia el atractivo del centro y la distancia respectivamente. El criterio del centro más próximo puede considerarse como un caso particular de esta función de atracción que resulta cuando los centros de servicio son igualmente atractivos o cuando β es mucho mayor que α.

En este trabajo se considerarán funciones de atracción definidas de la forma

$$a(v,x) = \frac{a_x}{f(d_{vx})}$$

donde *f* es una función continua, creciente y cóncava, de valores positivos, y a_x es un valor positivo perteneciente a un intervalo cerrado y acotado. Utilizando esta función de atracción, se plantea un modelo en redes cuyo objetivo consiste en determinar las localizaciones y los atractivos de los centros de servicio que maximizan una función de beneficios. Este modelo presenta algunos aspectos del modelo formulado por Ghosh y Craig (1983) y del modelo de localización competitiva con preferencias proporcionales y demandas esenciales planteado por Hakimi (1990). La similitud respecto al modelo usado por Ghosh y Craig, radica en la formulación de la función objetivo como una función de beneficios donde el beneficio de un centro en *x* es

$$\Pi_x = M_x W_x - C_x$$

siendo M_x el margen de beneficio por unidad ingresada, W_x la cantidad ingresada, y C_x el coste fijo dependiente de características (atractivo) del centro tales como su tamaño.

Además,

$$W_x = \sum_{v \in V} w_x(v)$$

siendo

$$w_x(v) = w(v) P_{vx}$$

donde *w(v)* es la demanda en *v* y P_{vx} representa la probabilidad de que un consumidor en v acuda al centro de servicio ubicado en *x*. El valor de P_{vx} se calcula a partir de las propiedades del centro, en el artículo de Ghosh y Craig estas propiedades toman un conjunto discreto de valores. En este trabajo, los términos P_{vx} se definen considerando, además de las distancias entre los nodos de demanda y los centros de servicio, el atractivo de estos centros, sustituyéndose el cociente

$$\frac{1}{f(\boldsymbol{d}_{vz})}$$

que aparece en la expresión de la demanda capturada en el modelo de Hakimi, por

$$a(v,z) = \frac{a_z}{f(\boldsymbol{d}_{vz})}$$

para los nodos de demanda $v \in V$ y los puntos de servicio *z*.

Este trabajo está organizado en cuatro secciones. En la segunda sección se introduce el modelo y se prueba que, bajo ciertas condiciones, existe una solución del problema en un conjunto de nodos de la red. En la tercera sección se estudia el problema del equilibrio localización-atractivo siguiendo un procedimiento similar al empleado por Labbé y Hakimi (1991) para localizaciones y cantidades ofrecidas en los mercados por dos firmas competidoras. Finalmente, en la cuarta sección se hacen algunas observaciones y se señalan algunas extensiones.

2. El modelo

Una firma *F* desea establecer *r* centros de servicio en un mercado donde ya existen *p* centros de otras firmas competidoras. El mercado está representado por una red no dirigida y conectada *N(V,E)* donde $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es el conjunto de nodos y *E* es el conjunto de aristas. Un centro de servicio puede ubicarse en cualquier punto de la red y los consumidores están situados únicamente en los nodos. Cada nodo v tiene un peso no negativo *w(v)* que representa la demanda o poder de compra en este nodo para el bien o servicio ofrecido por los centros. Cada arista $e=[u,v]$ tiene una longitud igual a la distancia d_{uv} entre *u* y *v*. Existen *p* centros localizados en puntos dados $X_p = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ de la red, y la firma *F* desea ubicar *r* nuevos centros en los puntos $Y_r = \{y_1, y_2, ..., y_r\}$ de *N(V,E)* que competirán con los centros instalados en X_p. El margen de beneficio por unidad de ingreso de la firma *F* es *M* siendo $0 < M \leq 1$. Cada centro *j* tiene un atractivo a_j cuyo valor depende de las propiedades del centro y pertenece al intervalo $[L,U]$ donde $0<L<U$. El atractivo *a* tiene un coste *C(a)*. Se asume que las demandas son esenciales, esto quiere decir que

$$\sum_{x\in X_p} w_x(v) + \sum_{y\in Y_r} w_y(v) = w(v),\ \forall v \in V$$

donde $w_x(v)$ y $w_y(v)$ son las proporciones de poder de compra en el nodo *v* que captura un centro en *x* e *y* respectivamente. La demanda capturada viene dada por la expresión

$$w_z(v) = w(v)\frac{\dfrac{a_z}{f(d_{zv})}}{\displaystyle\sum_{x\in X_p}\frac{a_x}{f(d_{xv})} + \sum_{y\in Y_r}\frac{a_y}{f(d_{yv})}},\forall z \in X_p \cup Y_r$$

donde a_z es el atractivo del centro en *z*, y *f* es una función continua, creciente y cóncava, entre el conjunto de números reales no negativos y el conjunto de números reales positivos. Dados los centros de servicio localizados en $X_p = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ con atractivos $A_{X_p} = \{a_{x_1}, a_{x_2}, ..., a_{x_p}\}$, el beneficio de la firma *F* con centros localizados en $Y_r = \{y_1, y_2, ..., y_r\}$ y con atractivos $A_{Y_r} = \{a_{y_1}, a_{y_2}, ..., a_{y_r}\}$ es

$$\Pi(X_p, Y_r, A_{X_p}, A_{Y_r}) = \sum_{v\in V}\sum_{y\in Y_r} M w_y(v) - \sum_{y\in Y_r} C(a_y).$$

La firma *F* desea determinar las localizaciones Y_r y los atractivos A_{Y_r} que maximizan el beneficio Π.

Lema 1. *Sea g una función creciente y cóncava y f una función cóncava, tales que existe la función composición* $g \circ f$ *. Entonces* $g \circ f$ *es una función cóncava.*

Lema 2. *Dados a y b dos números reales no negativos, si f es una función cóncava entre el conjunto de números reales no negativos y el conjunto de números reales positivos, entonces la función*

$$F(x) = \frac{a}{\frac{1}{f(x)} + b}$$

es cóncava.

Demostración. Puesto que $F = g \circ f$ donde

$$g(x) = \frac{a}{\frac{1}{x} + b}$$

es una función creciente y cóncava, del lema 1 se deduce que *F* es cóncava.

Teorema 1. *Sea N(V,E) una red, f es una función continua, creciente y cóncava entre el conjunto de números reales no negativos y el conjunto de números reales positivos y C una función de valores positivos y continua en el intervalo [L,U].*

Se asume $p + r \leq |V|$. *Entonces existe un conjunto* $V_r \subset V$ *y atractivos* A_{V_r} *tales que*

$$\Pi(X_p, V_r, A_{X_p}, A_{V_r}) = \max_{Y_r, A_{Y_r}} \Pi(X_p, Y_r, A_{X_p}, A_{Y_r}).$$

Demostración. Las funciones *f* y *C* son continuas, *f* toma valores positivos, y la distancia de un punto dado de la red a un punto (variable) de ésta es continua; por tanto, la función Π es continua. Puesto que el intervalo [*L*,*U*] y la red *N(V,E)* son conjuntos compactos, se tiene que el conjunto factible del problema es compacto. De todo lo anterior se deduce que existe solución óptima. Supóngase que una solución óptima es $Y_r^* = \{y_1^*, y_2^*, ..., y_r^*\}$ con atractivos $A_{Y_r^*}^* = \{a_{y_1}^*, a_{y_2}^*, ..., a_{y_r}^*\}$, y que no todas las localizaciones en esta solución son nodos. Entonces

$$\Pi(X_p, Y_r^*, A_{X_p}, A_{Y_r^*}^*) = \max_{Y_r, A_{Y_r}} \Pi(X_p, Y_r, A_{X_p}, A_{Y_r})$$

Sin pérdida de generalidad puede asumirse que y_1^* no es un nodo y que pertenece a la arista [*u*,*v*]. Puede probarse que y_1^* puede trasladarse hacia *u* o hacia *v* dejando

ÍNDICE

fijas las localizaciones del resto de los centros y todos los atractivos, sin reducir

$$F(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_r^*) = \sum_{v \in V} \sum_{i=1}^{r} w_{y_i^*}(v) \ .$$

o lo que es igual sin aumentar

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum_{v \in V} \sum_{i=1}^{p} w_{x_i}(v) \ .$$

La función puede ser expresada de la forma siguiente

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum_{v \in V} \sum_{i=1}^{p} w(v) \frac{\dfrac{a_{x_i}}{f(\boldsymbol{d}_{x_i v})}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{a_{x_i}}{f(\boldsymbol{d}_{x_i v})} + \sum_{i=1}^{r} \frac{a^*_{y_i^*}}{f(\boldsymbol{d}_{y_i^* v})}}$$

$$= \sum_{v \in V} \sum_{i=1}^{p} w(v) \frac{\dfrac{a_{x_i}}{f(\boldsymbol{d}_{x_i v})}}{\dfrac{a_{y_1^*}}{f(\boldsymbol{d}_{y_1^* v})} + G}$$

donde

$$G = \sum_{i=1}^{p} \frac{a_{x_i}}{f(\boldsymbol{d}_{x_i v})} + \sum_{i=2}^{r} \frac{a^*_{y_i^*}}{f(\boldsymbol{d}_{y_i^* v})} \ .$$

Todos los atractivos y todas las localizaciones excepto y_1^* están fijadas. Supóngase que la localización del centro de servicio actualmente en $y_1^* \in [u, v]$ viene dada por la variable *z* la cual representa la distancia entre este centro y *u* en la arista [*u*,*v*]. Asumiendo que y_1^* varía en [*u*,*v*] y $v' \in V$, la distancia $\boldsymbol{d}_{y_1^* v'}$ es una función cóncava de *z* que se denotará $\boldsymbol{d}_{v'}(z)$. Puesto que las localizaciones del resto de los centros están fijadas, $F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = F_1(z)$ donde

$$F_1(z) = \sum_{v' \in V} \sum_{i=1}^{p} w(v') \frac{\dfrac{a_{x_i}}{f(\boldsymbol{d}_{x_i v'})}}{\dfrac{a_{y_1^*}}{f(\boldsymbol{d}_{v'}(z))} + G}$$

con $0 \le z \le d_{uv}$. Es posible probar que la función F_1 alcanza su valor mínimo en $z=0$ ó $z = d_{uv}$. Considerando que *f* es creciente y cóncava, usando los lemas 1 y 2, se deduce que F_1 es una función cóncava de *z* con $0 \le z \le d_{uv}$, lo que implica que

$$\min_z F_1(z) = \min\{F_1(0), F_1(d_{uv})\}$$

Por tanto el centro en y_1^* puede ser trasladado hacia *u* o *v* sin aumentar $F(x_1, x_2, ..., x_p)$ o lo que es equivalente, sin reducir $F(y_1^*, y_2^*, ..., y_r^*)$. De todo lo anterior se deduce que existe un conjunto $V_r \subset V$ con $|V_r| = r$ tal que

$$F(Y_r^*) = F(V_r) = \sum_{v \in V} \sum_{v' \in V_r} w_{v'}(v)$$

Por tanto

$$\Pi(X_p, Y_r^*, A_{X_p}, A_{Y_r^*}^*) = M F(Y_r^*) + \sum_{y \in Y_r^*} C(a_y^*) =$$

$$M F(V_r) + \sum_{y \in Y_r^*} C(a_y^*) = \Pi(X_p, V_r, A_{X_p}, A_{Y_r^*}^*)$$

y el conjunto de localizaciones V_r con atractivos $A_{V_r}^* = A_{Y_r^*}^*$ es una solución del *problema localización-atractivo.*

3. Equilibrio localización-atractivo

Considérese que la firma F_1 tiene *p* centros ubicados en los puntos $X_p = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ con atractivos $A_{X_p} = \{a_{x_1}, a_{x_2}, ..., a_{x_p}\}$. La firma F_2 tiene r centros localizados en los puntos $Y_r = \{y_1, y_2, ..., y_r\}$ con atractivos $A_{Y_r} = \{a_{y_1}, a_{y_2}, ..., a_{y_r}\}$.

El margen de beneficio por unidad de ingreso de la firma F_i es M_i, $i=1,2$. El beneficio para la firma F_i es $\Pi_i(X_p, Y_r, A_{X_p}, A_{Y_r})$

ÍNDICE

donde

$$\Pi_1(X_p,Y_r,A_{X_p},A_{Y_r})=\sum_{v\in V}\sum_{i=1}^{p}M_1 w(v)\frac{\dfrac{a_{x_i}}{f(d_{x_i v})}}{\sum_{k=1}^{p}\dfrac{a_{x_k}}{f(d_{x_k v})}+\sum_{k=1}^{r}\dfrac{a_{y_k}}{f(d_{y_k v})}}-\sum_{i=1}^{p}C(a_{x_i})$$

$$\Pi_2(X_p,Y_r,A_{X_p},A_{Y_r})=\sum_{v\in V}\sum_{i=1}^{r}M_2 w(v)\frac{\dfrac{a_{y_i}}{f(d_{y_i v})}}{\sum_{k=1}^{p}\dfrac{a_{x_k}}{f(d_{x_k v})}+\sum_{k=1}^{r}\dfrac{a_{y_k}}{f(d_{y_k v})}}-\sum_{i=1}^{r}C(a_{y_i})$$

Aplicando un procedimiento similar al empleado por Labbé y Hakimi (1991), para las localizaciones de los centros y las cantidades ofrecidas en los mercados por cada firma, el problema del *equilibrio localización-atractivo* es modelado como un juego en dos etapas. Se asume que las firmas seleccionan en primer lugar las localizaciones de sus centros de servicio y posteriormente eligen el atractivo.

Dadas las localizaciones $X_p=\{x_1,x_2,...,x_p\}$ e $Y_r=\{y_1,y_2,...,y_r\}$, el problema en la segunda etapa es determinar los atractivos $A^e_{X_p}=\{a^e_{x_1},a^e_{x_2},...,a^e_{x_p}\}$, y $A^e_{Y_r}=\{a^e_{y_1},a^e_{y_2},...,a^e_{y_r}\}$ tales que

$$\Pi_1(X_p,Y_r,A^e_{X_p},A^e_{Y_r})=\max_{A_{X_p}}\Pi_1(X_p,Y_r,A_{X_p},A^e_{Y_r})$$

$$\Pi_2(X_p,Y_r,A^e_{X_p},A^e_{Y_r})=\max_{A_{Y_r}}\Pi_2(X_p,Y_r,A^e_{X_p},A_{Y_r})$$

El problema de la primera etapa consiste en encontrar las localizaciones $X^e_p=\{x^e_1,x^e_2,...,x^e_p\}$ e $Y^e_r=\{y^e_1,y^e_2,...,y^e_r\}$ tales que

$$\Pi_1(X^e_p,Y^e_r,A^e_{X^e_p},A^e_{Y^e_r})=\max_{X_p}\Pi_1(X_p,Y^e_r,A^e_{X_p},A^e_{Y^e_r})$$

$$\Pi_2(X^e_p,Y^e_r,A^e_{X^e_p},A^e_{Y^e_r})=\max_{Y_r}\Pi_2(X^e_p,Y_r,A^e_{X^e_p},A^e_{Y_r})$$

El par (X^e_p,Y^e_r) es un equilibrio de Nash para la primera etapa combinado con un equilibrio de Nash para los atractivos, $(A^e_{X^e_p},A^e_{Y^e_r})$, en la segunda etapa.

En este trabajo se considera que los centros pertenecientes a la misma firma tienen el mismo atractivo $a_{x_i} = a_1$ y $a_{y_j} = a_2$ para $i = 1,2,...,p$ y $j = 1,2,...,r$. Se asume también que el coste del atractivo es una función continua y lineal a trozos en $[L, U]$ definida de la forma

$$C(a) = \begin{cases} \boldsymbol{h}_1 a + \boldsymbol{n}_1 & si \quad \boldsymbol{q}_0 = L \le a \le \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{h}_2 a + \boldsymbol{n}_2 & si \quad \boldsymbol{q}_1 \le a \le \boldsymbol{q}_2 \\ \cdots & \cdots \quad \cdots \\ \boldsymbol{h}_k a + \boldsymbol{n}_k & si \quad \boldsymbol{q}_{k-1} \le a \le \boldsymbol{q}_k \\ \cdots & \cdots \quad \cdots \\ \boldsymbol{h}_T a + \boldsymbol{n}_T & si \quad \boldsymbol{q}_{T-1} \le a \le U = \boldsymbol{q}_T \end{cases}$$

donde $L = \boldsymbol{q}_0 < \boldsymbol{q}_1 < \cdots < \boldsymbol{q}_k < \cdots < \boldsymbol{q}_T = U$.

3.1. La segunda etapa

Dadas las localizaciones $X_p = \{x_1, x_2,..., x_p\}$ e $Y_r = \{y_1, y_2,..., y_r\}$, el problema de la segunda etapa es determinar los atractivos a_1^e y a_2^e tales que

$$\Pi_1(X_p, Y_r, a_1^e, a_2^e) = \max_{L \le a_1 \le U} \Pi_1(X_p, Y_r, a_1, a_2^e) = \sum_{v \in V} M_1 w(v) \frac{a_1 g_1(v)}{a_1 g_1(v) + a_2^e g_2(v)} - pC(a_1)$$

$$\Pi_2(X_p, Y_r, a_1^e, a_2^e) = \max_{L \le a_2 \le U} \Pi_2(X_p, Y_r, a_1^e, a_2) = \sum_{v \in V} M_2 w(v) \frac{a_2 g_2(v)}{a_1^e g_1(v) + a_2 g_2(v)} - rC(a_2)$$

donde

$$g_1(v) = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{f(\boldsymbol{d}_{x_i v})} \qquad g_2(v) = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{f(\boldsymbol{d}_{y_i v})}$$

Si (a_1^e, a_2^e) es un equilibrio en $[L,U] \times [L,U]$ y $(a_1^e, a_2^e) \in [q_{j-1}, q_j] \times [q_{k-1}, q_k]$ entonces (a_1^e, a_2^e) es un equilibrio en $[q_{j-1}, q_j] \times [q_{k-1}, q_k]$. Esto es,

$$\Pi_1(X_p, Y_r, a_1^e, a_2^e) = \max_{q_{j-1} \le a_1 \le q_j} \Pi_1(X_p, Y_r, a_1, a_2^e)$$

$$\Pi_2(X_p,Y_r,a_1^e,a_2^e)=\max_{q_{k-1}\le a_2\le q_k}\Pi_2(X_p,Y_r,a_1^e,a_2)$$

Por tanto, los pares de equilibrio en $[L,U]\times[L,U]$ pueden estudiarse a partir de los pares de equilibrio en los intervalos $[q_{j-1},q_j]\times[q_{k-1},q_k]$ para $1\le j,k\le T$. Los lemas siguientes serán utilizados para demostrar los resultados establecidos en los teoremas 2 y 3 sobre la existencia y la unicidad del equilibrio en la segunda etapa del juego. El contenido de estos lemas está basado en el texto de Friedman (1991).

Lema 3. *Sea* $\Gamma(I,S,P)$ *un juego no cooperativo de información completa donde* $I=\{1,2,\dots,l\}$ *es el conjunto de jugadores,* $S=S_1\times S_2\times\cdots S_l$ *es el espacio de estrategias siendo* $S_i\subset\Re^m$ *el espacio de estrategias del jugador i, y* $P=(P_1,P_2,\dots,P_l)$ *la función de pagos con* P_i *la función de pagos del jugador i. El juego* $\Gamma(I,S,P)$ *satisface las condiciones siguientes:*

Condición 1. $S_i\subset\Re^m$ *es compacto y convexo para cada* $i\in I$.
Condición 2. $P_i(s)$ *es continua en S para cada* $i\in I$.
Condición 3. $P_i(s\,|\,t_i)$ *es cuasicóncava respecto de* $t_i\in S_i$, *para cada* $s\in S, i\in I$ *donde para una estrategia* $s=(s_1,s_2,\dots,s_l)\in S$, $s\,|\,t_i$ *denota* $(s_1,\dots,s_{i-1},t_i,s_{i+1},\dots,s_l)\in S$, *el vector s con* t_i *en el lugar de* s_i.

Entonces el juego Γ *tiene al menos un punto de equilibrio.*

Lema 4. *Sea* $\Gamma(I,S,P)$ *un juego no cooperativo de información completa que satisface las condiciones siguientes:*

Condición 1. $S_i\subset\Re^m$ *es compacto y convexo para cada* $i\in I$.
Condición 4. $P_i(s)$ *es una función de clase* $C^{(2)}$ *en S para cada* $i\in I$.
Condición 5. $P_i(s\,|\,t_i)$ *es estrictamente cuasicóncava con respecto a* $t_i\in S_i$, *para cada* $s\in S, i\in I$.
Condición 6. *La matriz*

$$\Im(s)=\left(\frac{\partial^2 P_i(s)}{\partial s_{ik}\partial s_{jl}}\right)_{i,j\in I;k,l=1,\dots,m}$$

es cuasidefinida negativa para cada $s\in S$ *; esto es* $\Im(s)+\Im^t(s)$ *es definida negativa para cada* $s\in S$.

Entonces el juego Γ *tiene un único punto de equilibrio.*

Teorema 2. Sea

$$F(a_1,a_2)=\sum_{v\in V} w(v)\frac{g_1(v)g_2(v)}{(\mathrm{a}_1 g_1(v)+\mathrm{a}_2 g_2(v))^2}.$$

Existe un único par de atractivos de equilibrio $\left(a_{1jk}^{e}, a_{2jk}^{e}\right)\in\left[\boldsymbol{q}_{j-1},\boldsymbol{q}_j\right]\times\left[\boldsymbol{q}_{k-1},\boldsymbol{q}_k\right]$ dado por:

1. $\left(a_{1jk}^{*}, a_{2jk}^{*}\right)$ si $\left(a_{1jk}^{*}, a_{2jk}^{*}\right)\in\left[\boldsymbol{q}_{j-1},\boldsymbol{q}_j\right]\times\left[\boldsymbol{q}_{k-1},\boldsymbol{q}_k\right]$, siendo

   $a_{1jk}^{*}=M_1^2 M_2 r\boldsymbol{h}_k F(rM_1\boldsymbol{h}_k, pM_2\boldsymbol{h}_j)$ y $a_{2jk}^{*}=M_1 M_2^2 p\boldsymbol{h}_j F(rM_1\boldsymbol{h}_k, pM_2\boldsymbol{h}_j)$.

2. $\left(\boldsymbol{q}_{j-1},\boldsymbol{q}_{k-1}\right)$ si $F\left(\boldsymbol{q}_{j-1},\boldsymbol{q}_{k-1}\right)\le min\left\{\dfrac{p\boldsymbol{h}_j}{M_1\boldsymbol{q}_{k-1}},\dfrac{r\boldsymbol{h}_k}{M_2\boldsymbol{q}_{j-1}}\right\}$.

3. $\left(\boldsymbol{q}_{j-1},\boldsymbol{q}_{k}\right)$ si $\dfrac{r\boldsymbol{h}_k}{M_2\boldsymbol{q}_{j-1}}\le F\left(\boldsymbol{q}_{j-1},\boldsymbol{q}_{k}\right)\le\dfrac{p\boldsymbol{h}_j}{M_1\boldsymbol{q}_{k}}$.

4. $\left(\boldsymbol{q}_{j},\boldsymbol{q}_{k-1}\right)$ si $\dfrac{p\boldsymbol{h}_j}{M_1\boldsymbol{q}_{k-1}}\le F\left(\boldsymbol{q}_{j},\boldsymbol{q}_{k-1}\right)\le\dfrac{r\boldsymbol{h}_k}{M_2\boldsymbol{q}_{j}}$.

5. $\left(\boldsymbol{q}_{j},\boldsymbol{q}_{k}\right)$ si $F\left(\boldsymbol{q}_{j},\boldsymbol{q}_{k}\right)\ge max\left\{\dfrac{p\boldsymbol{h}_j}{M_1\boldsymbol{q}_{k}},\dfrac{r\boldsymbol{h}_k}{M_2\boldsymbol{q}_{j}}\right\}$.

6. $\left(\boldsymbol{q}_{j-1},a^{*}\right)$ con $a^{*}=\underset{\mathrm{a}_2\in\left(\boldsymbol{q}_{k-1},\boldsymbol{q}_k\right)}{\arg}\left\{\dfrac{\partial\Pi_2}{\partial a_2}\left(\boldsymbol{q}_{j-1},a_2\right)=0\right\}$ si $F\left(\boldsymbol{q}_{j-1},\boldsymbol{q}_{k}\right)<\dfrac{r\boldsymbol{h}_k}{M_2\boldsymbol{q}_{j-1}}$,

   $F\left(\boldsymbol{q}_{j-1},\boldsymbol{q}_{k-1}\right)>\dfrac{r\boldsymbol{h}_k}{M_2\boldsymbol{q}_{j-1}}$ y $a_1^{*}\le\boldsymbol{q}_{j-1}$

7. $\left(\boldsymbol{q}_{j},a^{*}\right)$ con $a^{*}=\underset{\mathrm{a}_2\in\left(\boldsymbol{q}_{k-1},\boldsymbol{q}_k\right)}{\arg}\left\{\dfrac{\partial\Pi_2}{\partial a_2}\left(\boldsymbol{q}_{j},a_2\right)=0\right\}$ si $F\left(\boldsymbol{q}_{j},\boldsymbol{q}_{k-1}\right)>\dfrac{r\boldsymbol{h}_k}{M_2\boldsymbol{q}_{j}}$,

   $F\left(\boldsymbol{q}_{j},\boldsymbol{q}_{k}\right)<\dfrac{r\boldsymbol{h}_k}{M_2\boldsymbol{q}_{j}}$ y $a_1^{*}\ge\boldsymbol{q}_{j}$

8. $\left(a^*, \boldsymbol{q}_{k-1}\right)$ con $a^* = \underset{a_1 \in \left(q_{j-1}, q_j\right)}{\arg} \left\{ \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial a_1}\left(a_1, \boldsymbol{q}_{k-1}\right) = 0 \right\}$ si $F\left(\boldsymbol{q}_{j-1}, \boldsymbol{q}_{k-1}\right) > \dfrac{p\boldsymbol{h}_j}{M_1 \boldsymbol{q}_{k-1}}$,

$F\left(\boldsymbol{q}_{j-1}, \boldsymbol{q}_k\right) < \dfrac{p\boldsymbol{h}_j}{M_1 \boldsymbol{q}_k}$ y $a_2^* \leq \boldsymbol{q}_{k-1}$.

9. $\left(a^*, \boldsymbol{q}_k\right)$ con $a^* = \underset{a_1 \in \left(q_{j-1}, q_j\right)}{\arg} \left\{ \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial a_1}\left(a_1, \boldsymbol{q}_k\right) = 0 \right\}$ si $F\left(\boldsymbol{q}_{j-1}, \boldsymbol{q}_k\right) > \dfrac{p\boldsymbol{h}_j}{M_1 \boldsymbol{q}_k}$,

$F\left(\boldsymbol{q}_j, \boldsymbol{q}_k\right) < \dfrac{p\boldsymbol{h}_j}{M_1 \boldsymbol{q}_k}$ y $a_2^* \geq \boldsymbol{q}_k$.

Demostración. El beneficio $\Pi_i\left(X_p, Y_r, a_1, a_2\right)$ es una función estrictamente cóncava, y por tanto estrictamente cuasicóncava, respecto de a_i, $i=1,2$, con a_1 y a_2 en el conjunto compacto y convexo $\left[q_{j-1}, q_j\right]$ y $\left[q_{k-1}, q_k\right]$ respectivamente. Además estas funciones son de clase C[(2)] en $\left[q_{j-1}, q_j\right] \times \left[q_{k-1}, q_k\right]$. La matriz $\Im(s) + \Im^t(s)$ es

$$\begin{bmatrix} 2\dfrac{\partial^2 \Pi_1}{\partial a_1^2}\left(a_1, a_2\right) & \dfrac{\partial^2 \Pi_1}{\partial a_2 \partial a_1}\left(a_1, a_2\right) + \dfrac{\partial^2 \Pi_2}{\partial a_1 \partial a_2}\left(a_1, a_2\right) \\ \dfrac{\partial^2 \Pi_1}{\partial a_2 \partial a_1}\left(a_1, a_2\right) + \dfrac{\partial^2 \Pi_2}{\partial a_1 \partial a_2}\left(a_1, a_2\right) & 2\dfrac{\partial^2 \Pi_2}{\partial a_2^2}\left(a_1, a_2\right) \end{bmatrix}$$

y los subdeterminantes menores principales son

$$d_1 = -4M_1G_1 \qquad d_2 = 16M_1M_2G_1G_2 - \left(M_1 - M_2\right)^2 \left(G_1 - G_2\right)^2$$

donde

$$G_1 = \sum_{v \in V} w(v) \frac{a_1 g_1(v)^2 g_2(v)}{\left(a_1 g_1(v) + a_2 g_2(v)\right)^3} \qquad G_2 = \sum_{v \in V} w(v) \frac{a_2 g_1(v) g_2(v)^2}{\left(a_1 g_1(v) + a_2 g_2(v)\right)^3}$$

Evidentemente $d_1 < 0$. Por otro lado, dado $0 < e < 1$, el mínimo valor de la función $h(x,y,z,t) = 16xyzt - (x-y)^2(z-t)^2$ en el conjunto

$$D = \left\{(x, y, z, t) \in \Re^4 / \boldsymbol{e} \leq x \leq 1, \boldsymbol{e} \leq y \leq 1, z \geq \boldsymbol{e}, t \geq \boldsymbol{e}\right\}$$

es positivo, por tanto $d_2>0$. Aplicando el lema 4 se deduce que existe un único punto de equilibrio. Puesto que el par $\left(a^e_{1jk}, a^e_{2jk}\right)$ dado por las expresiones *(1)* a *(9)* satisface las condiciones de Kuhn-Tucker de los problemas

$$\max_{q_{j-1}\le a_1\le q_j} \Pi_1(X_p, Y_r, a_1, a^e_2)$$

$$\max_{q_{k-1}\le a_2\le q_k} \Pi_2(X_p, Y_r, a^e_1, a_2)$$

se concluye que $\left(a^e_{1jk}, a^e_{2jk}\right)$ es el par de atractivos de equilibrio en $\lfloor q_{j-1}, q_j\rfloor \times [q_{k-1}, q_k]$.

Teorema 3 . *Si* $\Pi_i\left(X_p, Y_r, a_1, a_2\right)$ *es cuasicóncava respecto de* a_i *Î [L,U], i=1,2, entonces existe un par de atractivos de equilibrio,* $\left(a^e_1, a^e_2\right)$ *, en [L,U]´[L,U]. Además:*

1. $\left(a^*_{1jk}, a^*_{2jk}\right)$ *es un equilibrio en [L,U]´[L,U] si y sólo si* $\left(a^*_{1jk}, a^*_{2jk}\right)$ *es un equilibrio en* $\lfloor q_{j-1}, q_j\rfloor$ ´ $[q_{k-1}, q_k]$.
2. $\left(q_j, q_k\right)$ *es un equilibrio en [L,U] ´ [L,U] si y sólo si es un equilibrio en los intervalos*
   $\lfloor q_{j-1}, q_j\rfloor$ ´ $[q_{k-1}, q_k]$ *si* $q_j \neq L$ y $q_k \neq L$,
   $\lfloor q_{j-1}, q_j\rfloor$ ´ $[q_k, q_{k+1}]$ *si* $q_j \neq L$ y $q_k \neq U$,
   $\lfloor q_j, q_{j+1}\rfloor$ ´ $[q_{k-1}, q_k]$ *si* $q_j \neq U$ y $q_k \neq L$,
   $\lfloor q_j, q_{j+1}\rfloor$ *y* $[q_k, q_{k+1}]$ ´ *si* $q_j \neq U$ y $q_k \neq U$.
3. $\left(q_j, a^*\right)$ *con a* Î* $\left(q_{k-1}, q_k\right)$ *es un equilibrio en [L,U]´[L,U] si y sólo si* $\left(q_j, a^*\right)$ *es un equilibrio en los intervalos* $\lfloor q_{j-1}, q_j\rfloor$ ´ $[q_{k-1}, q_k]$ *si* $q_j \neq L$ *y* $\lfloor q_j, q_{j+1}\rfloor$ ´ $[q_{k-1}, q_k]$ *si* $q_j \neq U$.
4. $\left(a^*, q_k\right)$ *con a* Î* $\left(q_{j-1}, q_j\right)$ *es un equilibrio en [L,U]´[L,U] si y sólo si* $\left(a^*, q_k\right)$ *es un equilibrio en los intervalos* $\lfloor q_{j-1}, q_j\rfloor$ ´ $[q_{k-1}, q_k]$ *si* $q_k \neq L$ *y* $\lfloor q_{j-1}, q_j\rfloor$ ´ $[q_k, q_{k+1}]$ *si* $q_k \neq U$.

DEMOSTRACIÓN. La existencia resulta de aplicar el lema 3. Las dobles implicaciones del teorema se obtienen considerando las propiedades de óptimización local-global para funciones cuasicóncavas, y la definición del equilibrio.

Corolario 1. *Si* $\boldsymbol{h}_1 < \boldsymbol{h}_2 < ... < \boldsymbol{h}_T$ *entonces existe un par de atractivos de equilibrio,* (a_1^e, a_2^e), *en [L,U]´[L,U].*

DEMOSTRACIÓN. En este caso, la función *C(a)* es convexa, por tanto las funciones Π_i, *i*=1,2, son cóncavas, y en consecuencia son cuasicóncavas, y el resultado se obtiene aplicando el teorema 3.

3.2. La primera etapa

El problema de la primera etapa consiste en determinar los conjuntos

$$X_p^e = \{x_1^e, x_2^e, ..., x_p^e\} \text{ e } Y_r^e = \{y_1^e, y_2^e, ..., y_r^e\}$$

tales que

$$\Pi_1(X_p^e, Y_r^e, a_{X_p^e}^e, a_{Y_r^e}^e) = \max_{X_p} \Pi_1(X_p, Y_r^e, a_{X_p}^e, a_{Y_r^e}^e)$$

$$\Pi_2(X_p^e, Y_r^e, a_{X_p^e}^e, a_{Y_r^e}^e) = \max_{Y_r} \Pi_2(X_p^e, Y_r, a_{X_p^e}^e, a_{Y_r}^e)$$

Considerando el teorema 1, la búsqueda de las localizaciones de equilibrio puede limitarse al conjunto de nodos. Como muestran los ejemplos siguientes construídos para *p=r=1*, no siempre existe un par de localizaciones de equilibrio y cuando éste existe no tiene que ser único.

Ejemplo 1

- *n=6, T=2*
- $\boldsymbol{d}_{v_i v_j} = 1 \text{ si } v_i \neq v_j, \boldsymbol{d}_{vv} = 0$
- $w(v) = 1, \forall v \in V$
- $M_1=0.75, M_2=0.50$
- $\boldsymbol{h}_1 = 0.2, \boldsymbol{n}_1 = \frac{3}{5}, \boldsymbol{h}_2 = 0.3, \boldsymbol{n}_2 = 0$
- $f(\boldsymbol{d}) = 0.1 + \boldsymbol{d}$

- $\boldsymbol{q}_0 = 1, \boldsymbol{q}_1 = 6, \boldsymbol{q}_2 = 9$

Para $v_i{}^{1}v_j$, fijados $x_1 = v_i$, $y_1 = v_j$, los atractivos de equilibrio son $a_{111} = 4.19804$ y $a_{211} = 2.79869$ y resultan los beneficios

$$\Pi_1(v_i, v_j, a_{111}, a_{211}) = 1.15753 \qquad \Pi_2(v_i, v_j, a_{111}, a_{211}) = 0.108832.$$

Para nodos iguales, fijados $x_1 = y_1 = v$, los atractivos y beneficios de equilibrio son $a_{111} = 5.4$, $a_{211} = 3.6$ y

$$\Pi_1(v, v, a_{111}, a_{211}) = 1.02 \qquad \Pi_2(v, v, a_{111}, a_{211}) = -0.12.$$

Por tanto cualquier par de nodos distintos es un par de localizaciones de equilibrio.

Ejemplo 2

- $n = 6, T = 1$
- $\boldsymbol{d}_{v_i v_j} = 1$ si $v_i \neq v_j, \boldsymbol{d}_{vv} = 0$
- $w(v) = 1, \forall v \in V$
- $M_1 = 0.90, M_2 = 0.30$
- $\boldsymbol{h}_1 = 0.2, \boldsymbol{n}_1 = 0$
- $f(\boldsymbol{d}) = 0.1 + \boldsymbol{d}$
- $\boldsymbol{q}_0 = 1, \boldsymbol{q}_1 = 6$

Para $v_i{}^{1}$ v_j, fijados $x_1 = v_i$, $y_1 = v_j$, los atractivos de equilibrio son $a_{111} = 4.26111$ y $a_{211} = 1.42036$ y los beneficios

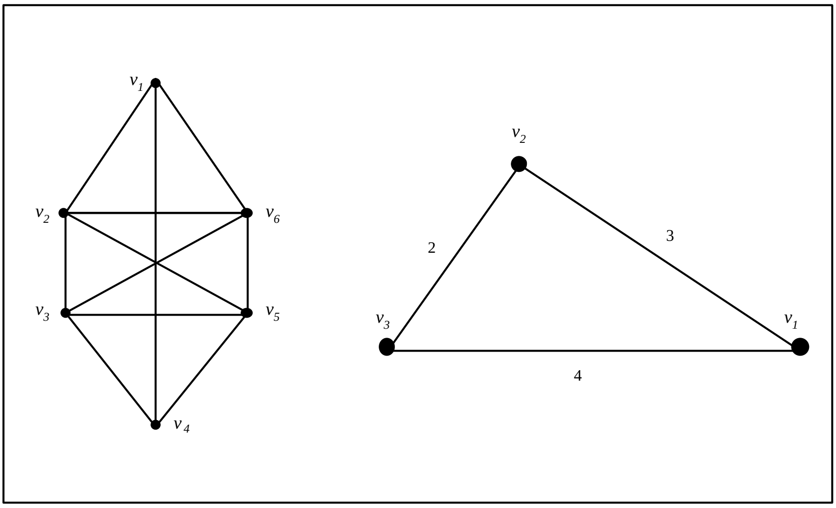
$$\Pi_1(v_i, v_j, a_{111}, a_{211}) = 2.91416 \qquad \Pi_2(v_i, v_j, a_{111}, a_{211}) = 0.260463.$$

Para nodos iguales, fijados $x_1 = y_1 = v$, los atractivos de equilibrio y los beneficios son $a_{111} = 5.0625$, $a_{211} = 1.6875$ y

$$\Pi_1(v, v, a_{111}, a_{211}) = 3.0375 \qquad \Pi_2(v, v, a_{111}, a_{211}) = 0.1125.$$

En este caso no existe equilibrio. Mientras que la primera firma obtiene mayores beneficios cuando los centros se ubican en el mismo nodo, la segunda obtiene un resultado mejor cuando las localizaciones son distintas.

Figura 1. Redes empleadas en los ejemplos



Ejemplo 3

- *n=3, T=1*
- Matriz de distancias y demanda en los nodos:

Tabla 1. Distancias y demandas

Localizaciones	v_1	v_2	v_3
v_1	0	3	4
v_2	3	0	2
v_3	4	2	0
Demanda	3	2	4

- $M_1=0.80, M_2=0.20$
- $h_1=0.2, n_1=0$
- $f(d)=0.1+d$
- $q_0=0.5, q_1=7$

La tabla 2 contiene los atractivos de equilibrio y los beneficios para cada par de localizaciones. Los resultados obtenidos indican que no existe un par de nodos de equilibrio.

Tabla 2. Atractivos de equilibrio y beneficios en el ejemplo 3

Localizaciones Firma 1/Firma 2	v_1	v_2	v_3
v_1	a_1=5.760 a_2=1.440 Π_1=4.608 Π_2=0.072	a_1=4.431 a_2=1.107 Π_1=3.827 Π_2=0.399	a_1=2.943 a_2=0.735 Π_1=3.249 Π_2=0.693
v_2	a_1=2.888 a_2=0.722 Π_1=4.120 Π_2=0.481	a_1=5.760 a_2=1.440 Π_1=4.600 Π_2=0.072	a_1=3.847 a_2=0.961 Π_1=3.342 Π_2=0.579
v_3	a_1=2.059 a_2=0.514 Π_1=4.350 Π_2=0.506	a_1=3.502 a_2=0.875 Π_1=4.521 Π_2=0.319	a_1=5.760 a_2=1.440 Π_1=4.608 Π_2=0.072

La búsqueda de un par de localizaciones de equilibrio en un conjunto finito de puntos puede hacerse mediante un proceso basado en la mejor respuesta de una firma a la elección previa de su competidora. En el primer paso la primera firma selecciona una localización, entonces la segunda firma responde eligiendo la localización que le proporciona el mayor beneficio, de nuevo interviene la primera firma actuando de la misma forma, y así sucesivamente. Si este proceso se desarrolla sin producirse ciclos convergerá a un equilibrio. En el ejemplo 3, donde se ha comprobado que no existe un par de localizaciones de equilibrio, suponiendo que la primera firma elige en primer lugar seleccionando v_1, este proceso conduce al siguiente ciclo:

Firma 1	Firma 2	Firma 1	Firma 2	Firma 1
1 →	3 →	3 →	1 →	1

4. Extensiones

En este trabajo se considera un problema de localización competitiva en redes donde el *poder de compra* capturado por un centro de servicio depende de la distancia entre este centro y los puntos de demanda, y de su *atractivo*. Considerando demandas esenciales se prueba que el problema de localización-atractivo tiene una solución en los nodos de la red, estudiándose posteriormente el problema del equilibrio. Para el estudio del problema del equilibrio se asume que el coste del atractivo viene dado por una función lineal a trozos; esta suposición parece razonable si se considera que las funciones lineales a trozos pueden ser utilizadas para aproximar otro tipo de funciones. Por otro lado, algunos sistemas de tarificación están definidos por una función lineal a trozos. El equilibrio en atractivos se estudia a partir de los *equilibrios parciales*, esto es, los equilibrios en los intervalos determinados por la partición del intervalo de variación del atractivo. Se prueba la existencia y la unicidad de estos equilibrios parciales a partir de los cuales puede obtenerse un par de atractivos de equilibrio para el problema original. Aunque aparentemente, para funciones de coste continuas, lineales a trozos y convexas, el equilibrio para el problema planteado inicialmente es único, este resultado no ha sido probado en este trabajo quedando como una de las extensiones posibles. Por otro lado, los ejemplos presentados en la sección 3 muestran que la existencia de las localizaciones de equilibrio no está asegurada, ello sugiere como otra posible extensión del trabajo el estudio de condiciones que permitan garantizar la existencia de localizaciones de equilibrio. Finalmente, podrían considerarse cadenas de centros de servicios con atractivos distintos y funciones de coste dependientes de la localización.

Bibliografía

CRAIG C.S., GHOSH A. y McLAFFERTY S. (1984): "Models of the retail location process: a review", Journal of Retailing, 60, 1, págs. 5-36.

FRIEDMAN J.W. (1991): Game theory with applications to economics, Oxford University Press, segunda edición.

GHOSH A. y CRAIG S. (1983): "Formulating retail location strategy in a changing environment", Journal of Marketing, 47, págs. 56-68.

EISELT H. y LAPORTE G. (1988): "Location of a new facility in the presence of weights", Asia-Pacific Journal of Operational Research, 5, págs. 160-165.

EISELT H. y LAPORTE G. (1989): "Competitive spatial models", European Journal of Operational Research, 39, págs. 231-242.

HAKIMI S.L. (1990): "Locations with spatial interactions: competitive locations and games", Discrete Location Theory, P.B. Mirchandani y R.L. Francis, Wiley & Sons, págs. 439-478.

HUFF D.L. (1964): "Defining and estimating a trade area", Journal of Marketing, 28, págs. 34-38.

ÍNDICE

LABBÉ M. y HAKIMI S.L. (1991): "Market and locational equilibrium for two competitors", Operations Research, 39, 5, págs.749-756.

LABBÉ M., PEETERS D. y THISSE J.F. (1995): "Location on networks", Handbooks in operations research and management science, vol. 8: Network routing, M.O. Ball, T.L. Magnati, C.L. Monma y G.L. Nemhauser, North-Holland, págs. 551-624.

REVELLE C. (1986): "The maximum capture or sphere of influence problem: Hotelling revisited on a network", Journal of Regional Science, 26, págs. 343-358.

SERRA D. y REVELLE C. (1995): "Competitive location in discrete space", Facility Location: A Survey of Applications and Methods, Z. Drezner, Springer-Verlag, págs. 367-386.