Estudios de Economía Aplicada
Nº 17, 2001. Págs. 53-68

Influencia de la estructura heterocedástica en la diversificación de carteras de acciones

AFONSO RODRÍGUEZ, Julio Angel
Dpto. de Economía de las Instituciones,
Estadística Económica y Econometría
BRUNO PÉREZ, Néstor Amadeo
Dpto. de Economía Financiera y Contabilidad
Facultad de CC. Económicas y Empresariales
Universidad de la Laguna

RESUMEN

En este trabajo estudiamos cómo afecta la diversificación al riesgo específico de carteras naïves, cuyos rendimientos presentan una estructura heterocedástica en las perturbaciones aleatorias del modelo de mercado. Dado que con esta especificación no es posible recoger en un único valor la dinámica de la varianza condicional como medida del riesgo específico asociado a la cartera diversificada, proponemos estimar la varianza de la distribución marginal de la perturbación como medida de dispersión que, para una estructura heterocedástica tipo ARCH (Heterocedasticidad Condicionada Autorregresiva), depende de los parámetros del modelo.

Para ilustrar esta aproximación, se han construido 120 carteras mediante la incorporación de títulos seleccionados de forma aleatoria, cuyos rendimientos presentan efectos ARCH. Los resultados indican que, en presencia de heterocedasticidad condicional tipo ARCH en el modelo de mercado, el riesgo específico también se reduce con la diversificación, lo que coincide con los resultados que esperaríamos obtener en base a la teoría desarrollada por la economía financiera para el caso de homocedasticidad.

Palabras Clave: Diversificación, Carteras, Riesgo específico, Heterocedasticidad, Bolsa.

ABSTRACT

In this paper we intend to study the way diversification affects specific risk to the returns of naïve portfolios, that show an heteroskedastic structure in the random disturbances when we use the market model approach.

ÍNDICE

We are not able to analize in a single value the dynamics of conditional volatility as a measure of specific risk associated to diversified portfolios. Therefore, we propose focusing on the variance of the unconditional distribution of the disturbance as a dispersion measure. This depends on the parameter of the model in a conditional heteroskedastic structure of the ARCH type (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity).

In order to illustrate this approach, we have built 120 portfolios by random selection of titles on the Spanish Stock Exchange. Their returns present ARCH effects. The results show that, when in presence of conditional heteroskedasticity of the ARCH-type in the market model, the specific risk is diminished as well, along with diversification. This agrees with the results we expected, according to the theory developed by finantial economics under homoskedasticity.

Key words: Diversification, Portfolio, Specific Risk, Heteroskedasticity, Stock Exchange.

UNESCO Code: 5302.05

Artículo recibido en diciembre de 1999. Revisado en junio de 2000.

Introducción

La reducción del riesgo asociado a la concentración de los activos se inició con los trabajos seminales de Markowitz (1952, 1959). Posteriormente una serie de autores realizan trabajos donde se estudian las características de los títulos para lograr una buena diversificación, entre estos trabajos cabe destacar los de King (1966), Evans (1968) y Sharpe (1972).

Estos estudios muestran que a medida que la cantidad de títulos es superior se produce una reducción de la volatilidad de los mismos; en otras palabras, cuando la diversificación aumenta la desviación típica de la rentabilidad desciende, alcanzando un nivel que se interpreta como la desviación típica de la rentabilidad de la cartera mercantil.

Por otro lado en la Ciencia Económica Financiera se ha realizado la modelización de los momentos de segundo orden para series temporales mediante modelos Autorregresivos Heteroscedásticos Condicionados (ARCH), propuestos originariamente por Engle (1982), surgiendo posteriormente los ARCH Generalizados (GARCH) en el trabajo de Bollerslev (1986), los ARCH en media (ARCH-M) descubiertos por Engle, Lillien y Robins (1987), los EGARCH propuestos por Nelson (1990), los IGARCH mencionados por Engle y Bollerslev (1986), en los que se realiza una integración en varianza, además de otras muchas modelizaciones que no mencionaremos.

Nuestro trabajo se estructura en cuatro apartados, en el primero de ellos indicamos las consecuencias de la diversificación para el riesgo específico, en el segundo hacemos referencia a los modelos de heterocedasticidad condicionada más habituales, en el tercero entroncamos la diversificación y el caso de existencia de heterocedasticidad condicionada para nuestro mercado doméstico, para finalizar con las conclusiones.

Diversificación

Para Sharpe (1976, pp 124-126) una “línea característica” de un título es una aproximación de la verdadera relación entre la rentabilidad del título (R_j) y la rentabilidad del mercado (R_M).

La incertidumbre con respecto a la rentabilidad real de un título se debe a que no se conoce con certeza:

1. El valor real de R_M.

2. El grado de divergencia entre el punto real y la línea característica del título es incierto.

A estas dos fuentes de incertidumbre se les suele dar una denominación formal. A la primera se la llama riesgo sistemático, y a la segunda riesgo no sistemático.

Si sólo fueran factibles los puntos situados en la línea característica, el riesgo sistemático sería la única fuente de incertidumbre.

El riesgo sistemático del título *j*-ésimo es:

$$\sigma_j^s = \beta_j \sigma_M ,$$

donde σ_M es la desviación típica de la rentabilidad del mercado y β_j es una constante de proporcionalidad, cuya magnitud depende del riesgo específico de cada título en relación al mercado.

El riesgo no sistemático se define como la diferencia entre el riesgo total y el riesgo sistemático, es decir

$$\sigma_p^u = \sigma_p - \sigma_p^s$$

donde σ_p = la desviación típica del tipo de rentabilidad de la cartera, σ_p^s = el riesgo sistemático de la cartera, y σ_p^u = el riesgo no sistemático de la cartera.

La relación entre riesgo sistemático y volatilidad es la misma tanto para los títulos como para las carteras. Así,

$$\sigma_p^s = \beta_p \sigma_M .$$

Todas las carteras eficientes se representan en la línea del mercado de capitales. Esto significa que sus tipos de rentabilidad están correlacionados perfectamente entre sí. Ya que la cartera de mercado es eficiente, todos los tipos de rentabilidad de las carteras eficientes han de estar perfectamente correlacionadas con R_M. Pero si el tipo de rentabilidad de una cartera está perfectamente correlacionado con R_M, su línea característica representará enteramente su relación con el mercado. Así se podría ver que el riesgo sistemático es la única fuente de incertidumbre con respecto al tipo de rentabilidad de una cartera eficiente.

En el modelo de Indice único el supuesto admitido relaciona la rentabilidad de cada título con el nivel de un índice especialmente importante:

$$R_{j,t} = \alpha_j + \beta_j I_t + \eta_{j,t}$$

donde $R_{j,t}$ = rentabilidad real del título j en el periodo t, α_j = constante, β_j = constante, I_t = rentabilidad del índice en el periodo t, y $\eta_{j,t}$ = perturbación aleatoria en el periodo t, que se asume distribuida con media nula y varianza constante, $\sigma_{\eta_j}^2$.

Dado el supuesto de que los términos $\eta_{j,t}$ no están correlacionadas entre sí ni con el nivel del índice, el riesgo total de una cartera formada por *N* títulos, donde cada uno entra en la cartera con una determinada ponderación, ω_j,

$$R_{N,t} = \sum_{j=1}^{N} \omega_j R_{j,t} = \sum_{j=1}^{N} \omega_j \alpha_j + I_t \sum_{j=1}^{N} \omega_j \beta_j + \sum_{j=1}^{N} \omega_j \eta_{j,t} = \bar{\alpha}_N + I_t \bar{\beta}_N + \bar{\eta}_{N,t}$$

es una función relativamente simple de los valores predichos, es decir,

$$\sigma_N^2 = \bar{\beta}_N^2 \sigma_I^2 + \sum_{j=1}^{N} \omega_j^2 \sigma_{\eta_j}^2 = \left(\sigma_N^s\right)^2 + \left(\sigma_N^u\right)^2$$

donde

$$\bar{\beta}_N^2 = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \omega_j \omega_k \beta_j \beta_k \qquad \sigma_I^2 = Var(I_t).$$

Considérese ahora una cartera bien diversificada. Para concretar, supóngase que se van a incluir $n < N$ títulos, cada uno de ellos por la misma cantidad de unidades monetarias, es decir,

$\omega_j = \dfrac{1}{n}$ para todo título incluido en la cartera ($j = 1 \ldots n$)

$\omega_j = 0$ para todos los restantes títulos ($j = n+1 \ldots N$).

Dado este convenio, los títulos desde $(n+1)$ hasta *N* se pueden despreciar, al no estar incluidos en la cartera. Así, pues,

$$\sigma_n^2 = \bar{\beta}_n^2 \sigma_I^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{\eta_j}^2 = \left(\sigma_n^s\right)^2 + \left(\sigma_n^u\right)^2$$

donde $\bar{\beta}_n^2 = \dfrac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \beta_j \beta_k$.

Considérese ahora el riesgo originado por las características específicas de los títulos,

$$\left(\sigma_n^u\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} \omega_j^2 \sigma_{\eta_j}^2$$

Puesto que las carteras que se consideran implican una participación idéntica en unidades monetarias de los títulos del 1 hasta el *n*, cada una de las correspondientes ponderaciones, ω_j, son iguales (1/*n*). El riesgo debido a las características especificas de los títulos es, pues:

$$\left(s_n^u\right)^2 = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 s_{h_j}^2$$

sumando y agrupando términos se obtiene,

$$\left(s_n^u\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{s_{h_j}^2}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{s_{h_1}^2 + s_{h_2}^2 + \ldots + s_{h_j}^2 + \ldots + s_{h_n}^2}{n}\right)$$

La expresión entre paréntesis representa el valor medio de $s_{h_j}^2$ para los *n* títulos incluidos en la cartera. Sin embargo, para la cartera considerada en su conjunto, el riesgo total debido a estos factores es sólo una *n*-ésima parte del valor medio de los títulos constitutivos de la cartera. Así para carteras diversificadas:

$$s_n^2 \approx \overline{b}_n^2 s_I^2 \quad \text{y} \quad s_n \approx \overline{b}_n s_I$$

Para igual inversión en cada título, en una cartera compuesta por un número infinito de títulos se limita el riesgo originado por la incertidumbre con respecto al índice, incluso una diversificación pequeña puede lograr una reducción de riesgo importante. Una cartera que contenga 15 ó 20 títulos se puede considerar bien diversificada[1].

Modelos de Heterocedasticidad Condicional

Muchas de las series temporales financieras observadas en frecuencias elevadas, presentan fundamentalmente dos características relevantes:

1. Nula o escasa estructura regular dinámica en la media. Habitualmente, si estas series tienen algún tipo de estructura dinámica en los niveles, esta suele estar suficientemente representada por un modelo AR(1) o MA(1) con parámetros pequeños.
2. Distribuciones leptocúrticas.

---

1. En el CAPM no aparece el riesgo diversificable, se premia únicamente el sistemático. Un título con mucho riesgo total pero con relación nula con el mercado tiene una beta igual a cero y tiene el mismo rendimiento esperado que el título sin riesgo.

ÍNDICE

El comportamiento de la rentabilidad de los activos financieros, tiene periodos de relativa estabilidad, seguidos de intervalos de alta volatilidad. En econometría, las técnicas que utilizan los momentos de segundo orden, más concretamente la heterocedasticidad, resultan una ampliación del análisis de series temporales para los momentos de primer orden que comenzaran a investigar Box y Jenkins (1976). Cabe entonces tratar de especificar un modelo en el que la varianza de la predicción puede cambiar en el tiempo, tales como los modelos de Heterocedasticidad Condicionada Autorregresiva (ARCH), propuesto originariamente por Engle (1982). Un modelo ARCH univariante representa un proceso estocástico que se caracterizan por que, aunque tienen media nula y no están correlacionados, poseen una varianza condicionada que no es constante en el tiempo.

Un proceso tipo ARCH puede especificarse a partir del término de perturbación de un modelo de regresión de la forma,

$$y_t = \mathbf{x}_t\mathbf{q} + u_t \ (t = 1, ..., T)$$

donde, y_t es la variable dependiente, $\mathbf{x}_t$ es el vector de dimensión m que contiene el conjunto de variables endógenas incluidos en el conjunto de información Ψ_{t-1} y $\mathbf{q}$ es un vector de parámetros desconocidos. La distribución de la variable dependiente condicionada a toda la información existente es,

$$\boldsymbol{y_t|\mathbf{y}_{t\text{-}1} \sim F(x_t\mathbf{q}\, h_t^2\ )}$$

donde $F(u)$ es la distribución condicionada del proceso (no ruido blanco) u_t y es la varianza condicional que se puede formular como,

$$\mathbf{u_t = z_t h_t, z_t \sim i.i.d.}\boldsymbol{F_z}\mathbf{(0,1)}$$

donde z_t es además independiente de u_t, de forma que

$$\mathrm{Var}_{t-1}[u_t] = h_t^2 = \omega + h\left(\{u_{t-i}^2\}_{i=1,...,q}, \{h_{t-j}^2\}_{j=1,...,p}\right)$$

donde $Var_{t\,1}$, la varianza condicionada a la información en t–1, es alguna función $h(\cdot)$ que puede depender tanto de términos de perturbación pasados como de valores retardados de la propia varianza condicional.

Weiss (1984, 1986) sugiere algunos tipos de procesos ARCH donde h_t^2 es una función de los valores retardados de y_t y de otras variables exógenas que se encuentran dentro del conjunto de información. Bollerslev (1986) señala la posibilidad de que la varianza condicionada h_t^2 sea, además, una función de los valores retardados de ella misma (h_{t-1}^2, ..., h_{t-p}^2), dando lugar a un tipo de modelos que se conocen como ARCH Generalizados o GARCH de orden (q, p).

El Modelo GARCH(q, p) se describe por una suma de polinomios: uno autorregresivo de orden p y otro de media móvil de orden q, para la varianza heterocedastica, es decir,

$$h_t^2 = \boldsymbol{w}_0 + \sum_{i=1}^{q} \boldsymbol{w}_i u_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{l}_i h_{t-i}^2$$

Si en este esquema se imponen las restricciones, $\lambda_i = 0$ ($i = 1, ..., p$), tenemos entonces el esquema de generación de datos ARCH(q) donde si se cumple que ($\omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_q$) ≥ 1, o en el proceso GARCH(q, p) ($\omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_q + \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_p$) ≥ 1, esto se corresponde con una situación descrita como de persistencia en varianza, es decir una respuesta excesivamente lenta de la misma ante un shock, que se denomina integración en varianza, donde pueden existir $d > 0$ raíces unitarias en las ecuaciones características definidas sobre los polinomios en $\omega_i L^i$ y $\lambda_i L^i$, y $máx(q, p) - d$ raíces en el circulo unitario, situación que podría denotarse como IARCH(q, d) o IGARCH (q, p, d) respectivamente.

El modelo ARCH-M [Engle, Lillien y Robins (1987)] es el que modeliza la evolución de media y varianza de la serie, el EGARCH (Nelson 1990) plantea especificaciones no lineales en el modelo ARCH Generalizado de orden (p, q), y además otras modelizaciones son el GARCH Threshold, el GARCH-GJR, el Q-TARCH.

En nuestro trabajo nos limitaremos a plantear los problemas de la diversificación en las dos primeras modelizaciones tratadas y más concretamente al modelo ARCH (1) y GARCH (1, 1) por las razones que indicaremos en los siguientes apartados.

Diversificación y Varianza Condicional Heterocedástica

El análisis de series temporales económicas tradicionales se ha basado en el estudio de modelos para la media y varianza condicional, principalmente suponiendo constante este segundo momento. La obtención de estimaciones de la varianza condicional es útil desde el punto de vista de construcción de carteras, pero cuando se le otorga un valor no constante al riesgo específico se ha de acudir a modelizar la dinámica de la varianza condicional.

El modelo ARCH(q) describe un proceso de Martingala en Diferencias (MD), en la que $E[|u_t|] < \infty$. Un proceso Martingala en Diferencias tiene la propiedad de que su esperanza condicional $E(u_t) = E[E_{t-1}(u_t)] = 0$ en información pasada es cero y se caracteriza por carecer de autocorrelación con sus valores pasados. Así, por tanto, el proceso ARCH(*q*) tiene media no condicionada nula y, si z_t es un proceso estacionario (en este caso se asume que es un proceso puramente aleatorio – *i.i.d.*), la varianza de la distribución incondicional viene dada por,

$$\sigma_u^2 = \omega_0 \left(1 - \sum_{i=1}^{q} \omega_i \right)^{-1} .$$

Como es sabido todo proceso estocástico para ser débilmente estacionario precisa que su media y su estructura de autocovarianzas no condicionadas no dependan del tiempo. Aunque la distribución no condicionada de no tiene una forma conocida, todos los momentos impares de u_t son cero y en consecuencia la distribución no condicionada de u_t es simétrica. Además, en el caso del modelo ARCH(1) con distribución condicional normal, si $3\omega_1^2 < 1$, la curtosis es $3\left(1-\omega_1^2\right)/\left(1-3\omega_1^2\right)$, de forma que si $\omega_1 > 0$, el coeficiente de curtosis de la distribución no condicionada es superior a 3 y, por lo tanto, la distribución no condicionada de u_t tiene colas más anchas que la de la distribución normal, es decir, es una distribución leptocúrtica, propiedad que es observada en series financieras, donde es frecuente descubrir agrupaciones de observaciones extremas.

Aunque u_t no tiene autocorrelación, la estructura dinámica de la serie aparece en u_t^2. Taylor (1986) prueba que la función de autocorrelación (fac) del cuadrado de un proceso ARCH(*q*) tiene la misma forma que la fac de un proceso AR(*q*).

Una vez indicados estos aspectos, y dado que no es sorprendente la existencia de un alto grado de correlación entre las rentabilidades de los índices y las rentabilidades de los títulos, el tipo de rentabilidad de toda cartera razonablemente bien diversificada estará muy correlacionada con el mercado; bajo esta idea, Sharpe (1972, 1976) nos indica que ante diversificaciones adecuadas se alcanzan una disminución del riesgo específico. Lo que sucede es que estas circunstancias se plantean en el caso de las distribuciones sean normales o distribuciones estables de Pareto, pero en el caso de estar ante varianzas condicionales no constantes en los títulos no será posible ni siquiera determinar el comportamiento de la varianza ante una diversificación de títulos.

Como primer problema para poder medir la evolución del riesgo específico, se da la circunstancia que en las modelizaciones de heterocedasticidad condicionada tipo ARCH, la ecuación para varianza condicional se representa mediante una curva, con lo que no será factible indicar si ante un incremento de títulos de forma aleatoria la varianza de la cartera tiende a ser mayor o no.

Partiendo de estas circunstancias, y ante la imposibilidad de alcanzar una medida puntual de la varianza condicional, bajo una óptica de Heterocedasticidad

Autorregresiva Condicionada de orden uno, planteamos como medida puntual del riesgo la varianza no condicional, que no nos proporcionará el valor del riesgo específico, pero sí nos indicará su tendencia, que de ser utilizable tendría un comportamiento similar al indicado por Sharpe (1972, 1976).

Para ello, inicialmente se construyen de forma aleatoria carteras diversificadas (durante el periodo 2 de enero de 1994 a 30 de junio de 1997), para las rentabilidades diarias de 120 títulos del mercado continuo de la bolsa española. De esta manera, obtenemos 120 carteras naïves con 1, 2, 3, ..., 120 títulos.

Una vez determinadas las 120 carteras, realizamos las modelizaciones ARCH(1) de las mismas, tomando como variable dependiente, en lugar del IBEX 35 como la representación más frecuentemente considerada del índice del mercado, el Indice General de la Bolsa de Madrid, altamente correlacionado con aquél, de forma que se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$R_{N_j,t} = \alpha_j + \beta_j R_{M,t} + u_{N_j,t},$$
$$u_{N_j,t} = z_{N_j,t} h_{N_j,t},$$
$$z_{N_j,t} \sim i.i.d.N(0,1)$$
$$h^2_{N_j,t} = \omega_{0,j} + \omega_{1,j} u^2_{N_j,t-1}, \qquad j = 1,\ldots,120$$

donde el rendimiento de la *j*-ésima cartera naïve se ha calculado como

$$R_{N_j,t} = \sum_{k=1}^{j} R_{a_k,t}, \qquad j = 1,\ldots,120$$

y $R_{ak,t}$ es el rendimiento diario del título k-ésimo.

En favor de esta especificación podemos argumentar que se trata tan sólo de una primera aproximación al logro del objetivo final, mucho más complejo, del estudio planteado, sin la intención de caracterizar completamente inicialmente este fenómeno. Sin embargo, no está exento tampoco de alguna justificación teórica. Dado que no presentamos los resultados genéricos derivados de la estimación (y validación) de este modelo para los 120 conjuntos de datos (carteras) seleccionados, podemos realizar algunas consideraciones generales sobre la correcta especificación del mismo. Si consideramos que el verdadero modelo explicativo de la evolución temporal de la varianza condicional fuera un proceso GARCH(1, 1), tendríamos que la verdadera varianza no condicionada vendría dada por

$$\sigma^2_{uj} = \frac{\omega_{0,j}}{1-\left(\omega_{1,j} + \lambda_j\right)} = \frac{\omega_{0,j}}{1-\delta_j}$$

donde debe verificarse la condición de estacionariedad débil dada por

ÍNDICE

$$0 < \delta_j < 1$$

o de forma equivalente, para todo $0 < \lambda_j < 1$, $0 < \omega_{1,j} < (1-\lambda_j)$. Sin embargo, si en lugar de esta correcta especificación, se considera erróneamente un esquema ARCH(1), estrictamente el parámetro $\omega_{1,j}$ estaría acotado de la forma

$$-\lambda_j < \omega_{1,j} < (1-\lambda_j)$$

de forma que la estimación que proporciona de la varianza no condicionada sería estrictamente positiva, pero la ecuación dinámica que describe el comportamiento de la varianza condicional podría proporcionar estimaciones negativas de h_t^2, algo que no se ha observado en nuestra muestra, donde todas las estimaciones de dicho parámetro son estrictamente positivas.

Esta comparación con el esquema particular GARCH(1,1) es, a la vez, lo suficientemente general dado que este modelo anida modelos ARCH de órdenes elevados, y rara vez en la literatura que trata el estudio de este tipo de series financieras ha encontrado significativas especificaciones de órdenes superiores a GARCH(1,1).

Asumiendo que todas estas carteras son carteras eficientes, es decir, que están perfectamente correlacionadas con la cartera representativa del mercado, tenemos que el riesgo total de la cartera j-ésima viene dado por,

$$\sigma_{N_j}^2 = Var\left[R_{N_j}\right] = \beta_j^2 \sigma_M^2 + \sigma_{uj}^2, \quad \sigma_{uj}^2 = \frac{\omega_{0,j}}{1-\omega_{1,j}},$$

de forma que el riesgo específico de la cartera puede medirse en términos de los parámetros del proceso ARCH(1) ajustado al exceso de rendimiento sobre la cartera de mercado, que puede estimarse como

$$\hat{\sigma}_{uj}^2 = \frac{\hat{\omega}_{0,j}}{1-\hat{\omega}_{1,j}}, \quad j = 1,\ldots,120.$$

Una alternativa a esta modelización univariante consistiría en especificar un modelo tipo ARCH multivariante, GARCH(q, p)-M, que permitiría obtener no sólo una medida del riesgo específico de cada cartera, sino del diferencial de riesgo específico que incorpora cada uno de los 120 títulos considerados en este estudio mediante la correspondiente función de covarianza condicional.

Es decir, sea

$$\boldsymbol{R}_{N,t} = (R_{N1,t}, R_{N2,t}, ..., R_{Nn,t})',$$

$$\mathbf{q} = (\mathbf{a}\,;\,\mathbf{b})', \ \mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)', \ \mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n)',$$

$$\boldsymbol{R}_{M,t} = R_{M,t} I_{n\times n},$$

$$\boldsymbol{U}_{N,t} = (u_{N1,t}, u_{N2,t}, ..., u_{Nn,t})',$$

$$\boldsymbol{R}_{N,t} = \boldsymbol{R}_{M,t}\mathbf{q} + \boldsymbol{U}_{N,t},$$

donde

$$\boldsymbol{U}_{N,t} = \boldsymbol{Z}_{N,t} \cdot \mathbf{H}_{N,t}, \qquad \boldsymbol{Z}_{N,t}\ N_n(\mathbf{0}_n, I_{n\times n})$$

$$\mathbf{H}_{N,t} = \{h_{jk,t}\}_{j,k = 1,...,n},$$

$$h_{jk,t} = \mathrm{Cov}[u_{Nj,t}, u_{Nk,t} \,|\, \mathbf{y}_{t\ 1}], \ j, k = 1, ..., n.$$

Un problema común a la modelización paramétrica multivariante de series temporales es el elevado número de parámetros que aparecen en dicha especificación. En particular, en el caso de asumir que dada varianza y covarianza condicional puede modelizarse como un proceso GARCH(q, p), tenemos que sólo en la matriz de varianzas-covarianzas, $\mathbf{H}_{N,t}$, habría que estimar un número de parámetros igual a

$$\frac{n(n+1)}{2}\left[1+(p+q)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right],$$

lo que excedería cualquier número de observaciones disponibles. Esto ha llevado a diversas propuestas de parametrización, como puede verse en, por ejemplo, Gourieroux (1993).

Los resultados completos de las 120 carteras no son posibles de aportar en el trabajo, por razones de dimensión, por lo que en la tabla 1 siguiente indicamos únicamente los valores de la estimación de la varianza no condicional.

Tabla 1. Estimación de la Varianza No Condicionada del Ajuste Máximo Verosímil ARCH(1) del Modelo de Mercado para 120 carteras Naïves

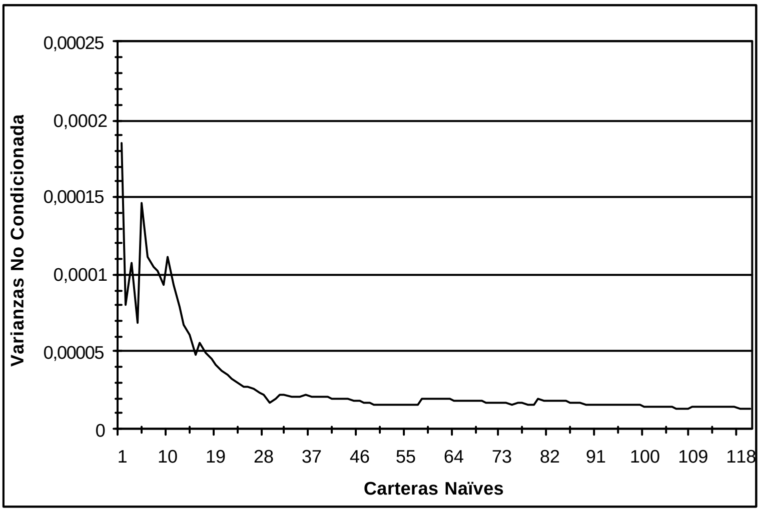
$$\hat{s}_{uj}^{2} = \frac{\hat{w}_{0,j}}{1-\hat{w}_{1,j}}, \quad j = 1,\ldots,56$$

N	$\hat{\sigma}_{uj}^2$	N	$\hat{\sigma}_{uj}^2$	N	$\hat{\sigma}_{uj}^2$	N	$\hat{\sigma}_{uj}^2$
1	0.000185348	15	4.8573E-05	29	1.7523E-05	43	1.9449E-05
2	8.04423E-05	16	5.5211E-05	30	1.96437E-05	44	1.9043E-05
3	0.000106531	17	4.9593E-05	31	2.2816E-05	45	1.8889E-05
4	6.92934E-05	18	0.000045415	32	2.2332E-05	46	1.8112E-05
5	0.000146491	19	4.2256E-05	33	2.0929E-05	47	1.7893E-05
6 [2]	0.00011094	20	3.8351E-05	34	2.1112E-05	48	1.745E-05
7	0.00010517	21	3.4533E-05	35	2.1067E-05	49	1.6813E-05
8	0.00010173	22	3.2793E-05	36	2.2397E-05	50	1.6468E-05
9	9.3415E-05	23	3.0701E-05	37	2.1998E-05	51	1.6619E-05
10	0.00011137	24	2.82483E-05	38	2.0924E-05	52	1.6174E-05
11	9.3229E-05	25	2.8224E-05	39	2.0871E-05	53	1.635E-05
12	0.000078903	26	2.5718E-05	40	2.0096E-05	54	1.6017E-05
13	6.8362E-05	27	2.4141E-05	41	1.9539E-05	55	1.559E-05
14	6.1691E-05	28	2.2401E-05	42	2.0003E-05	56	1.6037E-05
57	1.5633E-05	73	1.77 E-05	89	1.69 E-05	105	1.3928E-05
58	1.9191E-05	74	1.73E-05	90	1.65 E-05	106	1.377E-05
59	1.9857E-05	75	1.68E-05	91	1.66 E-05	107	1.3727E-05
60	1.9254E-05	76	1.7074E-05	92	1.65 E-05	108	1.3749E-05
61	1.9953E-05	77	1.70 E-05	93	1.61 E-05	109	1.4172E-05
62	1.9602E-05	78	1.67 E-05	94	1.58 E-05	110	1.442E-05
63	1.9209E-05	79	1.65 E-05	95	1.5857E-05	111	1.471E-05
64	1.8868E-05	80	1.92 E-05	96	1.57 E-05	112	1.4789E-05
65	1.8934E-05	81	1.87 E-05	97	1.54 E-05	113	1.468E-05
66	1.8362E-05	82	1.86 E-05	98	1.52 E-05	114	1.4398E-05
67	1.9018E-05	83	1.84 E-05	99	1.51 E-05	115	1.43 E-05
68	1.8668E-05	84	1.86 E-05	100	1.48 E-05	116	1.41 E-05
69	1.8193E-05	85	1.82 E-05	101	1.45 E-05	117	1.39 E-05
70	1.7687E-05	86	1.78 E-05	102	1.4453E-05	118	1.37 E-05
71	1.7675E-05	87	1.75 E-05	103	1.4376E-05	119	1.35 E-05
72	1.7217E-05	88	1.73 E-05	104	1.4203E-05	120	1.34 E-05

2. En esta estimación fue necesario el empleo de una dummy debido a la falta de cotización durante la primera parte de la muestra del título seleccionado (aleatoriamente) en sexto lugar.

Con respecto a la estimación de la varianza incondicional que se obtiene en las 120 carteras aleatorias, se puede observar que aparece una tendencia a disminuir del riesgo específico de las carteras a medida que se diversifican las carteras aún en el caso de incorporar información histórica en el cálculo de dichas varianzas, mediante el empleo de modelos de heterocedasticidad condicionada, como puede apreciarse en el siguiente gráfico 1.

Gráfico 1. Varianzas Incondicionales Estimadas según la Modelización Heterocedástica Autorregresiva Condicionada (ARCH(1)) para Carteras Naïves de hasta 120 Títulos: Periodo 01/94-06/97



Los parámetros $\omega_{0,j}$, siguen una evolución de mayor a menor valor absoluto, y tienden a estabilizarse hacia el valor 0.0000122. Esta circunstancia está en consonancia con la idea de que al aumentar la diversificación disminuye la varianza, pues en caso de no ser heterocedástica la varianza condicional en base al esquema ARCH(1), $\omega_{1,j} = 0$, $\omega_{0,j}$ expresaría el valor del riesgo específico constante para cada cartera. En cuanto a los parámetros $\omega_{1,j}$, que representan la pendiente de la modelización ARCH, no muestran ninguna tendencia apreciable.

Estos cálculos están en consonancia con los resultados expresados por Gómez-Bezares et al. (1994) para carteras diversificadas (con comportamiento homocedástico en su perturbación aleatoria), en la que se consiguen decrementos significativos del riesgo de la cartera a partir de la 10 títulos, indicando también que a mayor diversificación se obtiene un menor grado de ganancia. Con respecto a esta última circunstancia, en las carteras que hemos obtenido y durante el periodo objeto de estudio, no tienen tendencia a decrecer a medida que se aumenta el número de acciones de la misma sino que van mostrando ligeros aumentos a medida que se incrementa el número de títulos en la cartera diversificada.

De esta manera, además del riesgo sistemático, siempre se mantendrá una parte de riesgo específico, que si bien, como hemos observado, tiende a disminuir, nunca podrá llegar a ser compensado en caso de existir heterocedasticidad en el comportamiento de la varianza de la perturbación aleatoria.

El planteamiento realizado con respecto a los modelos autorregresivos condicionales (ARCH), también se pueden plantear para el caso de los modelos autorregresivos condicionales generalizados (GARCH), utilizando para ello las mismas 120 carteras aleatorias que han resultado del trabajo anterior. El modelo GARCH(1,1) ayuda a dar flexibilidad a la dinámica de h_t^2, que para el modelo de un solo índice tendría la forma:

$$R_{j,t} = \alpha_j + \beta_j I_t + u_{j,t},$$

$$u_{j,t} = z_{j,t} h_{j,t}$$

$$h_{j,t}^2 = \omega_{0,j} + \omega_{1,j} u_{j,t-1}^2 + \lambda_j h_{j,t-1}^2 .$$

Como en el caso del proceso ARCH(q), la distribución no condicionada generada por un proceso GARCH (1, 1) tiene una forma desconocida, con media cero y varianza no condicionada dada por $\boldsymbol{s}_{uj}^2 = \boldsymbol{w}_{0,j}\left(1-(\boldsymbol{w}_{1,j} + \boldsymbol{l}_j)\right)^{-1}$.

Sin embargo puede demostrarse que todos los momentos impares son cero y, por lo tanto, la distribución es simétrica. Además dicha distribución es leptocúrtica, si $3\boldsymbol{w}_{1,j}^2 + 2\boldsymbol{w}_{1,j}\boldsymbol{l}_j + \boldsymbol{l}_j^2 < 1$ y la distribución de $u_{j,t}$ es normal condicional, siendo el coeficiente de curtosis incondicional igual a $\boldsymbol{k}_{uj} = \left(3+6\boldsymbol{w}_{1,j}^2\right)/\left(1-3\boldsymbol{l}_j^2 - 2\boldsymbol{w}_{1,j}\boldsymbol{l}_j - \boldsymbol{l}_j^2\right)$.

Llegado a este punto hemos considerado las modelizaciones GARCH(1,1) obteniendo unos resultados que no fueron tan satisfactorios, como el modelo ARCH(1), ya que a lo largo de las 120 carteras no se mostró una dinámica de paulatina disminución de la varianza no condicional, a lo que hay que añadir que en numerosas carteras las estimaciones de los modelos resultantes no cumplían la propiedad de estacionariedad (65 carteras de las 120).

Conclusiones

En el presente trabajo, realizado para el caso español, podemos indicar que si la varianza condicional de la perturbación aleatoria del modelo de mercado tiene una modelización heterocedástica de tipo ARCH(1), se puede afirmar que existe una diversificación en el riesgo específico que se plantea a partir de escasos títulos (alrededor de 9 acciones). Esta conclusión nos permite indicar que aún en el caso de comportamiento heterocedástico de tipo ARCH(1), podemos alcanzar una diversificación adecuada con una simple estrategia naïve; además podemos indicar que a partir de carteras de unos 25 títulos la reducción del riesgo específico no indica la necesidad de aumentar la diversificación de la cartera. Por otra parte, las conclusiones obtenidas no pueden generalizarse a una especificación de tipo GARCH(1,1), aunque no podemos saber si los resultados no han sido adecuados por no darse tal modelización en el riesgo específico de las diferentes carteras o por que en caso de comportamiento GARCH(1,1) no es factible realizar las afirmaciones anteriores.

Bibliografía

BOLLERSLEV, T. (1986) "Generalized Autoregresive Conditional Heteroskedasticity", Journal of Econometrics, 31, pp. 307-328.

ENGLE, R. F. (1982) "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U. K. Inflation", Econometrica, 50, pp. 987-1007.

ENGLE, R.F. y T. BOLLERSLEV (1986), "Modelling the Persistence of Conditional Variances", Econometric Reviews, 5, pp.1-87.

ENGLE, R. F.; D. M. LILIEN y R. P. ROBINS (1987) "Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model", Econometrica, 55, pp. 391-407.

EVANS, J. L. (1968) Diversification and the Reduction of Dispersion An Empirical Analysis, tesis doctoral, Graduate School of Business Administration, University of Washington, Seattle, Washington.

GOMEZ-BEZARES, F.; MADARIAGA, J. A. y J. SANTIBAÑEZ (1994) Valoración de Acciones en la Bolsa Española, Biblioteca de Gestión, Bilbao.

GOURIEROUX, C (1992) Modeles ARCH et Applications Financieres, Economica.

KING, B. F. (1966) "Market and Industry Factors in Stock Price Behavior, Journal of Business, enero, pp. 139-190.

MARKOWITZ, H. (1952) "Portfolio Selection", Journal of Finance, marzo, pp. 77-91.

MARKOWITZ, H. (1959) Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, John Wiley & Sons, Inc. Nueva York.

NELSON, D. B. (1990) "ARCH Models as Diffusion Approximations", Journal of Econometrics, 45, pp. 7-38.

SHARPE, W. F. (1972) "Risk, Market Sensitivity, and Diversification", Financial Analysts Journal, Enero-Febrero, pp. 74-79.

SHARPE, W. F. (1976) Teoría de Cartera y del Mercado de Capitales, Deusto, Bilbao.

WEISS, A. A. (1984) "ARMA models with ARCH Errors", Journal of Time Series Analysis, 5, pp. 129-143.

WEISS, A. A. (1986) "ARCH and Bilinear Time Series Models: Comparison and Combination", Journal of Business and Economic Statistics, 4, pp. 59-70.