ÍNDICE

Estudios de Economía Aplicada
Nº 17, 2001. Págs. 5-52

ARTÍCULO INVITADO

Desigualdad del rédito y bienestar social, descomposición, distancia direccional y distancia métrica entre distribuciones

DAGUM, CAMILO
Profesor, Universidad de Bologna, Italia
Profesor Emérito, Universidad de Ottawa, Canadá

RESUMEN

Se presentan y analizan los índices de desigualdad de Gini, de Atkinson y de la entropía generalizada. Para este último se estudian los casos particulares de Theil y de Bourguignon. Se discuten los méritos de cada uno de dichos índices desde el punto de vista del cumplimiento de propiedades tales como: (i) existencia de fundamentos realísticos de bienestar social, (ii) descomposición y (iii) sensibilidad a las transferencias de réditos entre unidades económicas. Se llega a la conclusión que el método de descomposición de las medidas de desigualdad no ofrece fundamento o información útil para la formulación de políticas socioeconómicas que se propongan la generación de procesos económicos que sean eficientes y satisfagan un principio de equidad.

Luego de presentar y analizar cuantitativamente las contradicciones a que da lugar la descomposición de los índices de base entrópica, se introduce y analiza el índice de **distancia direccional** entre distribuciones propuesto por Dagum (*Econometrica*, 1980 y *Journal of Business ane Economic Statistics,* 1987) y el índice de **distancia métrica.** Se evidencia que la **distancia direccional** y la **distancia métrica** dan respuestas a dos fenómenos socioeconómicos completamente diferentes. El primero ofrece una medida absoluta (en la unidad monetaria considerada) y una relativa (sin dimensión) de la afluencia de rédito de una población con respecto a otra con rédito inferior. En cambio, la **distancia métrica** ofrece una medida de la **disimilaridad** entre distribuciones del rédito de dos poblaciones.

1. Introducción

La construcción de una ciencia económica capaz de rendir cuenta de los procesos económicos observados y observables es un prerequisito esencial para la acción, es decir, (i) a nivel macroeconómico para la formulación responsable de políticas económicas y sociales con rostro humano, o sea, que sean capaces de contribuir a la formación de recursos humanos y al crecimiento económico sostenido, con eficiencia y equidad distributiva, y (ii) a nivel microeconómico, para la concepción, la organización y la activación de procesos económicos eficientes, entendidos como toda actividad económica que se desarrolla en el tiempo y que se ocupa de la transformación de la materia, de la energía o de la información.

Hace 39 siglos que el rey Hamurabi de Babilonia promulgó el famoso código que lleva su nombre, el cual legisla sobre importantes temas, incluyendo principios de equidad social y de respeto a los derechos de la mujer en la sociedad. Esta es la mas antigua fuente de información de la que tengo conocimiento. Los principios sociales allí incorporados son posteriormente completados y desarrollados por eminentes filósofos sociales y economistas. Todos ellos han sostenido la importancia que tiene el conocimiento científico para ofrecer los fundamentos y establecer los límites, validez y viabilidad de toda política de bienestar social, privilegiando el funcionamiento eficiente de la economía (tecnología de los procesos económicos y formación de capital humano), de las instituciones (las que deben contener un enunciado claro de los principios de justicia social o equidad a aplicar) y de la Justicia (sin corrupción). En efecto, Sócrates afirma que sólo es útil el conocimiento que nos hace mejores; Séneca, luego de afirmar que, saber lo que es una línea recta no tiene importancia alguna si no se sabe lo que es rectitud, agrega que el **centro**, el **origen** y el **fin** de toda investigación es únicamente el ser humano; Juan Luis Vives, filósofo y humanista español, discípulo de Erasmo, sostuvo que el conocimiento es útil si él nos ayuda a tomar las mejores decisiones. Una opinión similar es adoptada por el econometrista norteamericano Jacob Marschak (1949) en su clásica contribución sobre las previsiones económicas, reimpreso como Cap. 1 en Hood y Koopmans, compiladores, (1953). Rousseau (1755), en su clásica contribución sobre los orígenes de la desigualdad, al sostener que es sobre el ser humano que él tiene que hablar, agrega que el problema que está investigando muestra que es a los seres humanos a los que él debe dirigirse dado que los problemas de esta naturaleza no son planteados por todos aquellos que tienen miedo de buscar y respetar la verdad. Luego presenta el concepto fundamental de las **relaciones sociales**. A partir de este concepto se puede estudiar el papel de las estructuras institucionales, tanto en la construcción de sistemas económicos y políticos que respeten los principios de equidad, de igual oportunidad y de justicia social, como en la construcción de sociedades opresivas, inequitativas, privilegiando minorías arrogantes, corruptas e incompetentes. Anticipándose a K. Marx en la formulación del importante concepto de las relaciones sociales de producción, sostiene que la investigación sobre los orígenes históricos de la desigualdad exige el estudio de los orígenes históricos de la sociedad, dado que la desigualdad es una **relación social**.

Un estadista eminente, Franklin D. Roosevelt, en su segundo mensaje presidencial al Congreso de los Estados Unidos, cuando su programa económico y social había ya revertido el curso descendente de la Gran Depresión de los años treinta, afirmó que la prueba de nuestro progreso no consiste en demostrar que agregamos mas a aquellos que poseen demasiado, sino en proveer lo suficiente para aquellos que tienen muy poco. Roosevelt fué consistente con este pensamiento de profundas raíces antropocéntricas, presentando un claro y evidente rostro humano en su concepción de los procesos económicos de producción y de distribución. En la ultima fase de la segunda guerra mundial, anticipando su programa político, económico y social de posguerra en sostén de un nuevo orden económico, político y social a nivel mundial, enuncia sus famosas cuatro libertades: (i) liberación del miedo, (ii) liberación de la necesidad, (iii) libertad de palabra, y (iv) libertad religiosa.

El pensamiento roosveltiano contrasta dramáticamente con la opresión, la tortura, el asesinato, la perversión ideológica y la censura total a la libertad de expresión impuestas por las tiranías militares que azotaron Argentina, Chile, Paraguay y tantos otros países latinoamericanos. Su pensamiento también contrasta con la realidad actual de una globalización salvaje, globalización que se realiza a partir de una desenfrenada libertad de especulación financiera y una total despreocupación por el ser humano. Esta especulación ha arrancado totalmente el rostro a la globalización que anhelamos, a la que aspiramos todos los seres humanos de buena voluntad. La globalización real está produciendo una repudiable polarización de la riqueza de una minoría sin escrúpulos y un aumento sistemático de la pobreza y de la desigualdad en la distribución del ingreso y de la riqueza. Desgraciadamente, la globalización real de la década de los noventas parece que nos conduce a un **anarco-capitalismo** o, mas bien, a una forma de **anarco capitalismo,** en la que cada vez, con mayor frecuencia, las decisiones macroeconómicas, políticas y sociales son determinadas por los intereses de las grandes corporaciones multinacionales y apoyadas por el Fondo Monetario Internacional.

Eminentes economistas, maestros y amigos bienamados tales como Corrado Gini, Maurice Allais, Oskar Morgenstern y François Perroux, contribuyeron con gran responsabilidad científica a la construcción de una ciencia económica auténticamente antropocéntrica. Viene a mi memoria el concepto de desarrollo económico avanzado por François Perroux, a mediados del siglo XX, cuando afirma con rigor científico y profunda convicción humanista que el desarrollo económico consiste en alcanzar la liberación de los seres humanos y, para cada ser humano, la liberación de todo el ser humano.

Inspirado en la tradición científica y filosófica de los eminentes intelectuales antes citados, Dagum (1997a), ha avanzado los siguientes cuatro principios fundamentales aplicables a toda sociedad con vocación de libertad y de progreso:

(1) Principio económico: la eficiencia;
(2) Principio social: la equidad;
(3) Principio político: la libertad y la democracia;
(4) Principio humanista (ecuménico): la preservación digna de la especie humana y de su hábitat.

Estos cuatro principios se encuentran fuertemente integrados y ofrecen las bases, los pilares fundamentales para la construcción de una sociedad y por lo tanto de una economía con rostro humano.

Ninguno de estos principios puede ser ignorado sin comprometer seriamente el cumplimiento de los restantes. El abandono de la eficiencia económica, como cuando se pretende alcanzar una equidad o justicia social por vías irresponsablemente populistas y demagógicas, destruye la eficiencia económica y el bienestar social (pues la ineficiencia vuelve ficticia la justicia social declamada), como así también la libertad y la democracia, las que resultan comprometidas por los conflictos sociales generados por la contradicción entre la equidad declamada y la equidad observada; a su vez, la ineficiencia económica afecta seriamente la ecología y las condiciones de vida de la especie humana.

Estos cuatro principios forman un sistema, un cuadro de referencia conceptual de orden superior, que debe ser utilizado y aplicado en el análisis y en las evaluaciones de políticas socioeconómicas y de las decisiones empresariales y sindicales.

A continuación nos ocupamos de la medición de: (i) la desigualdad intra- e inter-distribuciones, (ii) los fundamentos de bienestar social de las medidas de desigualdad propuestas, (iii) sus respectivos grados de sensibilidad a transferencias de rédito, (iv) la descomposición de las medidas de desigualdad de Gini y de entropía generalizada, (v) la afluencia económica relativa (distancia económica relativa y direccional), y (vi) la distancia métrica entre distribuciones.

2. Medidas de desigualdad

A toda distribución del rédito le corresponde una medida de desigualdad la cual sintetiza con un escalar la relativa disparidad del rédito entre los miembros de una población.

La generalizada evidencia empírica de desigualdades existentes entre las poblaciones de unidades o agentes económicos, tanto en los paises desarrollados como en los en proceso de desarrollo, con respecto a la posesión de atributos tales como capacidad, abilidad, estado de salud física y mental, esfuerzo, dedicación, exposición a diferentes ambientes culturales y educacionales en el hogar y en el medio social y formación académica determinan una desigual distribución del rédito entre estas unidades. Esta inexorable evidencia empírica contrasta claramente con la afirmación idealista de Descartes avanzada en su celebrado Discurso del Método. Descartes (1637, p.81) sostiene que, "De todas las cosas del mundo, el buen sentido es el que presenta una mayor igualdad en su distribución, pues todos piensan que ellos están tan abundantemente dotados de él que aún aquellos mas difíciles de ser complacidos en cualquier otro asunto, en general no desean poseer mas buen sentido de lo que ya poseen." Descarte llama *buen sentido* o *razón* a la capacidad o poder de avanzar un buen juicio y de distinguir lo verdadero de lo falso. Luego agrega que la naturaleza ha dotado a todos los seres humanos de igual capacidad de buen sentido o razonamiento y concluye con la sorprendente afirmacion, ciertamente no verificada, que existe suficiente evidencia en apoyo de su punto de vista.

Se puede razionalizar esta posición de Descartes dentro de su pensamiento filosófico cuyo sistema es el idealismo y cuyo método es el racionalismo, pero resulta imposible aceptar esta visión igualitaria por su evidente refutación factual en todos los tiempos históricos.

En contraste evidente con la afirmación idealista de Descartes, Rousseau (1755, p.167) sostiene que el tema de la desigualdad es uno de los mas espinosos que los filósofos tienen que resolver. Luego se pregunta, "Cómo podríamos conocer las causas de la desigualdad entre los seres humanos si no comenzamos por conocer a la humanidad?" El contenido de esta pregunta va mucho mas lejos del tema específico de la desigualdad pues ofrece un argumento sólido en sostén de un fundamento macroecómico del comportamiento microeconómico. Si añadimos el conocimiento de la genética, en general, de la biología y de la familia, completaríamos esta visión macro con una visión micro, o sea, el de la existencia de fundamentos microeconómicos del comportamiento macroeconómico. Es decir, que **individualismo** y **holismo metodológico** se complementan para contribuir a la explicación de los comportamientos individuales y sociales (Dagum, 1996, 1999).

La preocupación de los filósofos de inspiración socialista por la desigual distribución de la riqueza y del rédito los induce, en el último cuarto del siglo XIX, a proponer reformas institucionales para reducir la intensidad de la desigualdad económica existente. Pareto expresa su desacuerdo con esta posisión, convencido que la desigual distribución del rédito se reduce *pari passu* con el crecimiento económico sin que sea necesario intervención alguna del poder político. Al elaborar sus argumentos para replicar a la posición de los filósofos de inspiración socialista, Pareto (1895, 1896, 1897) especifica, estima y analiza el modelo de distribución que lleva su nombre y propone el parámetro á como parámetro de desigualdad. Con esta contribución, Pareto abre un nuevo y fructífero campo de investigación cuantitativa en las ciencias económicas y sociales, la estadística y la teoría de la probabilidad.

Como en la polémica de las últimas décadas sobre los fundamentos micro-macro del comportamiento económico, o sea, la falsa oposición filosófica "individualismo-holismo metodológico", asistimos también aquí a una falsa oposición ideológica, pues ambas partes tienen parcialmente la razón. En efecto, las desigualdades observadas que se apartan de una equitable distribución del rédito son una consecuencia de las estructuras institucionales y del grado de eficiencia con las que funcionan, de la infraestructura socioeconómica, de las estructuras tecnológicas y de las estructuras de comportamiento de los agentes económicos y de subconjuntos pertinentes de ellos, es decir, de lo que podemos llamar, comprensivamente, las estructuras nacionales, condicionadas por las estructuras nacionales del resto del mundo. Las estructuras institucionales y la infraestructura socioeconómica de una nación proveen las bases sociopolíticas para el modo de formación, de acumulación y de distribución de la riqueza, del capital humano y del rédito, mientras que las estructuras tecnológicas y de comportamiento las complementan, reduciendo los obstáculos para poner en marcha un proceso sostenido de crecimiento con equidad. Por distribución equitable del rédito y de la riqueza no pretendemos sostener el absurdo inequitable de una distribución perfectamente igualitaria, la que es privilegiada por la escuela utilitarista inglesa y por muchos economistas que se ocupan de la distribución del rédito y de su correspondiente medida de desigualdad.. Sostenemos que las distribuciónes del rédito y de la riqueza son equitables si ellas se obtienen a partir de la aplicación rigorosa de un principio de equidad institucionalmente pre-establecido y socialmente aceptado.

Dagum (1995, 1996, 1999) analiza los fundamentos micro-macro del comportamiento económico y la interacción entre las estructuras institucionales, tecnológicas y de comportamiento a partir de la clase de conjuntos,

$$C = \{A, T, J\}, \qquad \textbf{(1)}$$

la que contiene como miembros, la clase de operadores económicos **A,**

$$A = \{A, F, G; RM\}, \qquad \textbf{(2)}$$

la que incluye el conjunto de las familias **A,** de las empresas **F** y de los gobiernos **G,** condicionada por el resto del Mundo, es decir los operadores **A, F** y **G, no residentes** de la región o el pais considerado. El conjunto **T** representa las estructuras tecnologicas,

$$T = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\}, \qquad \textbf{(3)}$$

mientras que el conjunto **J** representa las estructuras institucionales de la región o pais considerado,

$$J = \{J_1, J_2, \ldots, J_q\}. \qquad \textbf{(4)}$$

Recordamos que Pareto fué el primer investigador que especificó, analizó y aplicó un modelo de distribución del rédito. En esta contribución, Pareto propuso el parámetro **á** de su modelo como una medida de la desigualdad, sosteniendo que **á** crece cuando la desigualdad crece. Gini (1910, 1955), vease también Dagum (1987a), revierte la interpretación paretiana demostrando que á decrece cunado la desigualdad crece, tal que, hay completa ("perfecta") desigualdad cuando $a \rightarrow 1\downarrow$, en cambio, se alcanza la "perfecta" igualdad cuando $a \rightarrow \infty$.

Bresciani-Turroni (1910) propone la desviación media relativa como medida de desigualdad, mientras que Gini (1914) propone el famoso índice de desigualdad que lleva su nombre,

$$G = D/2\,m = E\,|Y - X|\,/2m, \qquad \textbf{(5)}$$

donde Δ es la diferencia media de Gini, μ es la media aritmética del rédito y las variables **X, Y** son independientes e idénticamente distribuidas.

Las propiedades matemáticas, estadísticas, económicas y sociales del índice de Gini atraen inmediatamente el interés de los investigadores.

Gini demuestra que **G** es una función creciente de la desigualdad, tiende a cero cuando hay perfecta igualdad y tiende a uno cuando hay perfecta desigualdad. Gini (1914) demuestra también que **G**, comno la deduce en (5), es igual al doble del area entre la curva de Lorenz en la hipótesis de perfecta igualdad, es decir, **L**= **F**, y la curva de Lorenz,

$$L(F) = \frac{1}{m}\int_0^F y(p)dp \qquad \textbf{(6)}$$

correspondiente a la distribución observada o estimada del rédito o de la riqueza. En símbolos,

$$G = \Delta/2m = 2\int_0^1 (F - L)dF = \int_0^\infty [(y/m)F(y) - L(y)]dF(y) = E[(Y/m)F(Y) - L(Y)] \qquad \textbf{(7)}$$

En el último tercio del siglo XX, dos medidas de desigualdad fueron propuestas, las que atrajeron el interés de algunos econometristas, pues introducían ideas nuevas que daban lugar a ulteriores desarrollos formales completamente vacíos de toda pertinencia factual para explicar o interpretar seriamente las desigualdades económicas observadas. En efecto, Theil (1967) propone el índice de desigualdad de base entrópica,

$$T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i/m)\log(y_i/m) = E[(Y/m)\log(Y/m)] \qquad \textbf{(8)}$$

el cual es un caso particular del índice de entropía generalizado,

$$I_b = \frac{1}{b\,(b+1)} \int_0^\infty (y/m)\left[(y/m)^b - 1\right] dF(y) = \frac{1}{b\,(b+1)} E\left[(Y/m)\left[(Y/m)^b - 1\right]\right] \qquad \textbf{(9)},$$

β real, el cual se obtiene cuando **â**_tiende a cero.

Atkinson (1970) propone el índice

$$A = 1 - M(r)/M(1) = 1 - M(r)/m, \qquad r \leq 1 \qquad \textbf{(10)}$$

donde **M(r),** para **r** < **1,** es la media armónica generalizada de orden **r** (Dagum, 1979, 1980, 1998) y, para **r** = **1,** es la media aritmética. En general, para todo **r,**

$$M(r) = \left[E\left(Y^r\right)\right]^{1/r} = m_r^{1/r}, \qquad Y \geq 0, \qquad \textbf{(11)}$$

r real, define la media potencial generalizada (Gini et al., 1957).

El índice (10) de Atkinson toma el valor uno cuando: (i) hay perfecta desigualdad; o (ii) existe por lo menos un rédito nulo y su parámetro **å** = **1** − **r** ≥ 1. Toma el valor cero cuando: (a) existe perfecta igualdad, pues al ser el rédito constante para todas las unidades, **M(r)** = **M(1)** = **m**; o (b) no existe aversión social a la desigualdad, es decir, **e** = **1.**

3. Desigualdad y bienestar social: una relación dual

J. Bentham (1789) es reconocido como el fundador de la filosofía social utilitarista. Sus proposiciones básicas, presentadas en Welch (1987, vol.4, p.770), son:

(I) el bienestar individual debe ser el fin de toda acción moral;

(II) cada persona se cuenta por una, ninguna puede ser contada en mayor proporción;

(III) el objeto de toda acción social es el de contribuir a promover la mas grande felicidad del mayor número de personas, interpretándosela como la acción social dirigida a maximizar el bienestar social (BS).

El siglo XVIII estaba ya maduro para recibir la contribución de Bentham como resultado del aporte de los filósofos sociales del Renacimiento. Entre los mas directamente relacionados con el tema del bienestar social debemos incluir al filósofo francés C.A.Helvetius (1715-1771), al teólogo y filósofo inglés W. Paley (1743-1805) y a los economistas Adam Smith (1723-1790) y Giuseppe Palmieri (1721-1794). Studenski (1958, p.17) sostiene que Palmieri fué un notable precursor de la teoría del bienestar económico desarrollada en el siglo XX. En 1787, Palmieri publica un tratado sobre el bienestar social *(Pubblica felicitá)* y, en 1792 publica un libro sobre la riqueza de las naciones *(Della ricchezza nazionale)*. Palmieri pertenece al distinguido grupo de economistas italianos que en el siglo XVIII ofrecieron un desarrollo vigoroso e independiente de la economía como ciencia social.

Palmieri se ocupó preferentemente sobre el bienestar económico mientras que Bentham y los que continuaron en esta linea de pensamiento se preocuparon en particular de las consecuencias sociales y políticas de toda filosofía social.

Los economistas ortodoxos (clásicos y neoclásicos) adoptaron los supuestos enunciados por Adam Smith sobre la existencia de una armonía de intereses, tal que, cada unidad económica realiza una búsqueda racional para maximizar su función de utilidad, obteniéndose como resultado la maximización del bienestar social, implicando la adopción de una política económica de *laissez-faire*, es decir, una política de exclusión total del gobierno en la actividad económica. Esta filosofía económica del *laissez-faire* se inspira en una simplificación excesiva de la obra de Bentham, la que en su título mismo, *Principles of Morals and Legislation,* retiene para el poder político la responsabilidad de ofrecer las estructuras institucionales necesarias para apoyar el compotamiento de las unidades económicas tendiente a maximizar sus correspondientes funciones de utilidad, en consecuencia, alcanzar simultaneamente la eficiencia económica y la maximización del bienestar social, es decir, crecimiento económico con equidad distributiva o, simplemente, desarrollo económico. Este contexto interpretativo de la obra de Bentham puede extenderse sin reserva a la obra de A. Smith cuando se considera simultaneamente sus obras *La riqueza de las naciones* y *Teoria de los sentimientos morales,* por lo tanto, eliminando la interpretación aislada, fuera del contexto de la obra de A. Smith, del tan abusado slogan de la *mano invisible,* cuando en la *Riqueza de las naciones* se encuentra claramente presente la acción de la *mano visible* como prerequisito necesario para el funcionamiento de la *mano invisible.* Un ejemplo concreto está dado por el papel que A. Smith (1776, Libro IV, cap. II) le asigna al *Acta de navegación de Cromwell (The British Act of Navigation),* la cual juega un papel fundamental en la construccion del imperio británico.

El pensamiento utilitarista de Bentham es seguido y ulteriormente desarrollado en economía y sociología por Pareto (1913, 1916) y en economía por Bergson (1938, 1954) y Samuelson (1947). Todos ellos admiten la existencia de comparaciones interpersonales de utilidad. En cambio, Stuart Mill, Marshall y Pigou introducen una simplificación inaceptable de la filosofía social de Bentham, Palmieri, Helvetius y Paley al adoptar funciones de utilidad separables para cada unidad económica, es decir, excluyendo toda comparación interpersonal de utilidad. En consecuencia, el bienestar social de una comunidad es simplemente la suma de las funciónes de utilidad de sus miembros, las que son extrictamente utilitaristas (separables). Mas aún, esta simplificación introduce una pérdida muy grande de información al remplazar el rédito, el que es una variable observable, por una función de utilidad en función solamente del rédito, la que es una variable latente (no observable), requiriendo por lo tanto la especificación de una forma matemática a elegir entre las infinitas formas posibles de funciones crecientes y cóncavas.

Dalton (1920) introduce el importante principio que toda medida de desigualdad del rédito debe tener un fundamento de bienestar social. Atkinson (1970) retoma este principio y aporta nuevas ideas y desarrollos a la contribución de Dalton. Mientras este autor trabaja en el espacio de funciones de utilidad, Atkinson pasa al espacio del rédito e introduce el concepto de rédito equivalente igualmente distribuido, dándole, al igual que Dalton, una interpretación axiológica totalmente inaceptable al sostener que la perfecta igualdad distributiva, la que corresponde al origen cero de toda medida de desigualdad, es la distribución que maximiza el bienestar social, por lo tanto, realizan una identificación incorrecta de la perfecta igualdad distributiva con la equidad o justicia distributiva.

Siguiendo una transformación análoga utilizada para deducir la distribución lognormal a partir de la distribución normal, Dalton (1920, p.349) avanza la hipótesis que a un crecimiento geométrico (a tasa constante) del rédito de todas las unidades económicas le corresponde un crecimiento aritmético constante del bienestar de cada una de ellas, es decir,

$$dw = \frac{dy}{y} \Rightarrow w = \log y + b \qquad \textbf{(12)}\ .$$

Dalton parte del rédito de subsistencia igual a uno al cual le hace corresponder un $\mathbf{w = 0}$. Aplicando esta condición inicial se deduce $\mathbf{b = 0}$. Tomando esperanza matemática en (12) se obtiene el bienestar social medio (BS),

$$E(w) = E(\log Y) \Rightarrow BS = \log M_g, \qquad \forall Y \geq 1 \qquad \textbf{(13)}\ ,$$

o sea, que el BS del excedente del rédito de subsistencia es igual al logaritmo de la media geométrica del rédito. Cuando la variable rédito **Y** está igualmente distribuida, la escuela utilitarista obtiene el máximo del BS. En el caso de Dalton, este es igual al logaritmo de la media aritmética del rédito **(log Ma)**. A partir de estos dos resultados Dalton propone como medida de desigualdad,

$$I_D = \log M_a / \log M_g \Rightarrow I_D \geq 1 \qquad \textbf{(14)}\ .$$

Es evidente que sin la hipótesis del rédito de subsistencia la medida de desigualdad de Dalton tendría un comportamiento anómalo pues admitiría la existencia de valores negativos para **ID**, y tendería a cero si se observara por lo menos un valor nulo del rédito.

La hipótesis (12) implica que la medida de desigualdad es invariante con respecto a cambios proporcionales constantes del rédito. Dalton adopta el principio que incrementos proporcionales del rédito determinan disminuciones de la desigualdad. Consecuente con este principio, Dalton (1920, p.350) avanza los siguientes postulados:

(i) a incrementos constantes del bienestar social, a partir de un rédito mayor de una cierta cantidad, le debe corresponder incrementos mas que proporcionales del rédito;
(ii) el bienestar económico debe tender a un límite finito cuando el rédito aumenta indefinidamente;
(iii) el bienestar económico debe tender a cero para un determinado monto del rédito y tomar valores negativos para montos inferiores.

A partir de estos postulados Dalton hipotiza la siguiente relación entre bienestar económico y rédito:

$$dw = \frac{dy}{y^2} \Rightarrow w = c - \frac{1}{y} \qquad \textbf{(15)}$$

donde **c** es una constante de integración positiva.

Procediendo como en (12), Dalton arriva a la siguiente medida de desigualdad:

$$I_D = \left(c - 1/M_a\right)/\left(c - 1/M_h\right) \qquad \textbf{(16)}$$

donde **Ma** es la media aritmética del rédito ya introducida en (14) y **Mh** es la media armónica.

Resulta evidente que las hipótesis de Dalton racionalizan una función de utilidad **w** creciente y cóncava, como puede verificarse en (12) y en (15), pagando el alto precio de la especificación de funciones de utilidad extrictamente utilitaristas, o sea, funciones de utilidad en función del rédito de la unidad económica considerada, independientemente del rédito de las restantes unidades (exclusión de toda comparación interpersonal de utilidad).

Lionel Robbins (1935), un distinguido economista liberal-conservador y partidario incondicional del *laissez-faire,* refuta el importante principio de Pigou-Dalton con el mismo absolutismo inaceptable con el que los sostenedores de este principio lo defienden cuando incluyen su extensión fuera de contexto, identificando los conceptos completamente distintos de perfecta igualdad (un concepto aritmético) con el de equidad (un concepto axiológico al que corresponde un juicio de valor, en este caso, un juicio de valor adoptado por una sociedad políticamente organizada).

En evidente referencia al principio de Pigou-Dalton, Robbins (1935, p.188 de la traducción al español publicada por el Fondo de Cultura Económica de Mexico, 1944) escribe, “La concepción de la utilidad relativa decreciente no justifica la conclusión de que los traspasos del rico al pobre aumentan la satisfacción total”. Luego agrega, “Es simplemente, *el depósito accidental de la asociación histórica de la economía inglesa con el utilitarismo”* (las itálicas están agregadas).

El Economic Journal recoge un comentario de Gini (1921) al artículo de Dalton publicado en dicha revista. Luego de elogiar la simplicidad del método propuesto por Dalton para medir la desigualdad del bienestar económico, agrega la siguiente importante observación (p.124): “Los métodos de la Escuela Italiana que Mr. Dalton explica no son en efecto comparables a los que él *[Dalton]* presenta, puesto que el objetivo de la Escuela Italiana no es la de estimar la desigualdad del bienestar económico sino la desigualdad del rédito y de la riqueza, independientemente de toda hipótesis sobre la relación funcional entre estas cantidades y el bienestar económico o con respecto a la aditividad del bienestar económico de las personas. Los mismos métodos *[de la Escuela Italiana]* son aplicables no solo al rédito y a la riqueza, sino tambien a toda característica cuantitativa (económica, demográfica, anatómica o psicológica)”.

Atkinson (1970) retoma las ideas daltonianas y las presenta en el espacio del rédito haciendo uso del concepto de rédito equivalente igualmente distribuido $\mathbf{ye}$, al cual lo define igual a $\mathbf{M(r)}$, para $\mathbf{r} = \mathbf{1} - \mathbf{e} < \mathbf{1}$, es decir, $\mathbf{e} > \mathbf{0}$, la que se introdujo en (11). Inspirándose en la teoría del riesgo, la cual es una analogía inaplicable al análisis de la desigualdad, además de introducir una distorción de los conceptos muy distintos de desigualdad y de equidad, Atkinson llama a parámetro de aversión a la desigualdad. Considera que $\mathbf{ye}$ es “simplemente análogo al valor cierto equivalente en la teoría del riesgo” (p.251), y que el índice de desigualdad $\mathbf{A}$ dado en (10) “es igual a la prima de seguro en la teoría del riesgo como ha estado definido por Pratt”. Consecuente con esta analogía conceptualmente inaceptable, Atkinson asume una aversión constante $\mathbf{e} = \mathbf{1} - \mathbf{r} \geq \mathbf{0}$ a la desigualdad, o sea, una elasticidad ε constante de la utilidad marginal con respecto al rédito. En consecuencia,

$$-y\frac{d^2U}{dy^2}\Big/\frac{dU}{dy}=\boldsymbol{e}, \qquad \boldsymbol{e}\geq 0 \qquad \mathbf{(17)}.$$

A partir de la ecuación diferencial (17) se deduce, $\mathbf{dU/dy} = \mathbf{by^{-e}}$, e integrando nuevamente se obtiene la función de utilidad $\mathbf{U(y)} = \mathbf{a} + \mathbf{by^{1-e}/(1-e)}$, $\mathbf{e} \geq \mathbf{0}$, a partir de la cual se deducen los casos particulares para $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ y para $\boldsymbol{e} \to \mathbf{1}$. En síntesis,

para $\varepsilon = 0$: $U(y) = a+by,\ \ 0 < b \leq 1$; **(18)**
para $\varepsilon = 1$: $U(y) = a+b \log y,\ \ b > 0$; **(19)**
para $\varepsilon > 0, \varepsilon \neq 1$: $U(y) = a+by^{1-\varepsilon}/(1-\varepsilon),\ b > 0$. **(20)**

Atkinson propone la ecuación (10) como índice de desigualdad, o sea, uno menos el cociente entre la media armónica generalizada y la media aritmética.

A partir de la función de utilidad correspondiente al índice de desigualdad de Atkinson dada en (20) y la de sus casos particulares (18) y (19) resulta evidente que este índice no admite comparaciones interpersonales de utilidad. El índice se desnaturaliza completamente cuando Atkinson lo racionaliza introduciendo una interpretación contrafactual de bienestar social y de analogía formal con la teoría del riesgo. En efecto, las hipótesis de base que Atkinson (1970) introduce son:

(i) aversión constante **e** $\geq$ **0** a la desigualdad, la que se presenta en (17);

(ii) el bienestar social medio (BS) y el bienestar social total (BST) se maximizan cuando hay perfecta igualdad;

l (iii) a función de utilidad es aditiva y separable, por lo tanto, no admite comparaciones interpersonales de utilidad;

(iv) el bienestar social correspondiente a la distribución del rédito observada **y** = **(y1, … , yi, … , yn)** es igual a la distribución igualitaria del rédito equivalente **ye,** es decir,

$$M\left(r; y_1,..., y_i,..., y_n\right) = M\left(r; y_e,..., y_e,..., y_e\right) = y_e, \quad r < 1 \ \textbf{(21)}\,\textbf{.}$$

En consecuencia,

$$BST\left(y_1,..., y_i,..., y_n\right) = BST\left(y_e,..., y_e,..., y_e\right) \qquad \textbf{(22)}\,\textbf{.}$$

La ecuación (22), la que se deduce a partir de la hipótesis (iv), introduce para todo **r** < **1,** por lo tanto **e** > **0,** la interpretación contrafactual y científicamente inaceptable, aún para los partidarios del crecimiento cero, que el bienestar social correspondiente a la distribución del rédito observada con media **M(r)** *es igual* al bienestar social dado por la distribución igualitaria con rédito **ye** = **M(r)** < **m** cuando la aversión a la desigualdad **e** es extrictamente positiva.

Por aplicación de las hipótesis (iii) y (iv), por lo tanto, de la hipótesi (iii) y la ecuación (22), se deduce,

$$BST\left(y_1,..., y_i,..., y_n\right) = \sum_{i=1}^{n} BS\left(y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} U\left(y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} U\left(y_e\right) = nU\left(y_e\right) \qquad \textbf{(23),}$$

obteniéndose para el bienestar social promedio,

$$BS = U(y_e) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U(y_i) \qquad \textbf{(24)}$$

A partir de (20) y (24) se deduce,

$$a + by_e^{1-e} / (1-\boldsymbol{e}) = a + \frac{b}{n(1-\boldsymbol{e})}\sum_{i=1}^{n} y_i^{1-e} \ ,$$

cuya solución con respecto a **ye** es,

$$y_e(\boldsymbol{e}) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^{1-e} \right)^{1/(1-e)} , \qquad \boldsymbol{e} \geq 0 \qquad \textbf{(25)}\ .$$

A partir de (25) se deducen los casos particulares,

$$y_e(0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = M(1) \qquad \text{para } \mathbf{e = 0,} \qquad \textbf{(26)}\ ,$$

la que corresponde a la función de utilidad (18). A su vez,

$$\lim_{e \to 1} y_e(\boldsymbol{e}) = M_g \qquad \textbf{(27)}\ ,$$

la que corresponde a la función de utilidad (19).

A partir de Dalton, varios autores se ocuparon de la relación entre bienestar social y desigualdad, aceptando el principio unidireccional introducido por Dalton, el que sostiene que una condición que debe satisfacer una medida de desigualdad es la de tener un fundamento de bienestar social. Estas contribuciones inducen a Sen (1973) a proponer una clasificación de las medidas de desigualdad del rédito según que se especifiquen a partir de fundamentos, (i) estadísticos; (ii) informáticos; (iii) normativos. Por “normativo” Sen interpreta que la medida de desigualdad reconoce fundamentos de bienestar social.

A partir de la contribución de Dagum(1990), desarrollada ulteriormente en Dagum (1993, 1995, 1998), donde este autor introduce el teorema dual que, dada la media del rédito, a toda medida de desigualdad le corresponde una función de bienestar social y recíprocamente, la clasificación de Sen pierde validez y debe ser remplazada por la siguiente: (a) tiene fundamentos socioeconómicos y estadísticos; (b) resulta especificada a partir de una analogía que es solo formal; (c) es el resultado de una especificación *ad-hoc*. Al primer grupo pertenece el índice de Gini y de Atkinson; al segundo, todas las medidas de desigualdad de origen entrópico; y al tercero, el índice de Bresciani-Turroni.

Dagum (1990, 1993, 1995, 1998) analiza las relaciones entre funciones de bienestar social (FBS) y medidas de desigualdad del rédito (MDR) y su relación dual a partir de la introducción de los siguientes principios:

P.1. Las unidades microeconómicas y los subconjuntos organizados de estas unidades, tales como, asociación de empresarios bancarios, asociación de empresarios metalúrgicos, donfederación de empresarios, sindicatos de trabajadores y confederación de trabajadores, realizan entre ellos comparaciones interpersonales de utilidadad y de desutilidad (CIU).

P.2. Las unidades microeconómicas, los subconjuntos organizados de estas unidades y la sociedad tienen una preferencia por un flujo de rédito mayor y por una mas grande acumulación de riqueza (PRK).

P.3. La sociedad tiene una preferencia por la equidad (PSE).

El principio CIU (P.1) implica que la función de utilidad U de cada unidad es una función del rédito de la unidad considerada y del rédito de todas las otras unidades, en consecuencia, es una función de su nivel de rédito y de la distribución del rédito de la población a la que pertenece.

Dada la distribución observada $\mathbf{(y1, \dots , yi, \dots , yn)}$ de una población de $\mathbf{n}$ unidades y un modelo $\mathbf{F(y) = P(Y \leq y)}$ de distribución del rédito, el que representa o genera la distribución observada, la forma mas general de la función de utilidad de la i-ésima unidad, la que incorpora CIU es:

$$\mathbf{U_i = U_i(y_1, \dots, y_i, \dots, y_n) = U_i(y_i, F(y))} \qquad \mathbf{(28).}$$

Adoptando para cada unidad la misma forma matemática de U, resulta

$$\mathbf{U = U(y, F(y))} \qquad \mathbf{(29).}$$

El principio CIU es fundamental para la economía política como ciencia social y es una propiedad innata a toda unidad económica. En efecto, los procesos económicos se estructuran dentro de sociedades políticamente organizadas (institucionalizadas) y sus miembros individuales como así también sus subconjuntos pertinentes estan siempre realizando comparaciones interpersonales sobre los *niveles* y sobre las *diferencias* de utilidad. Aún la escuela utilitarista realiza comparaciones interpersonales de *diferencias* de utilidad cuando se propone como objetivo la maximización de FBS. La fábula de Robinson Crusoe carece de derecho ciudadano *(droit de cité)* al interior de la economía política como ciencia social. El desarrollo de modelos matemáticos que excluyen las comparaciones interpersonales de utilidad pueden dar lugar a un excelente ejercicio intelectual pero contradicen totalmente el comportamiento de las unidades y de sus subconjuntos pertinentes en los procesos económicos de la vida real. Aún cuando la formalización de comparaciones interpersonales de utilidad es extremadamente difícil, dado que la función de utilidad es una variable latente (no observable), ella no puede servir de excusa para excluirla de la economía teórica y aplicada. La incorporación de las comparaciones interpersonales de utilidad en la especificación de funciones de utilidad pueden ser formuladas y estimadas en función de un conjunto de indicadores como en J.B. Pena Trapero (1977) y P. Zarzosa Espinal (1996). Para el caso de las distribuciones del rédito, se debe partir de una medida de desigualdad que incorpore comparaciones interpersonales de utilidad convincentes, como el índice de Gini, y deducir a partir de ella la correspondiente función de utilidad. Esta es la estrategia propuesta y desarrollada por Dagum (1990, 1993, 1995, 1998), el que parte de la ecuación fundamental del rédito (EFR),

$$y = U(y, F(y)) + S(y, F(y)) = U(y, F(y)) + mV(y, F(y)) \quad \textbf{(30)}$$

donde **U** es la función de utilidad introducida en (29), **S** es la función de pérdida y **V** es la función de desutilidad asociada a la medida de desigualdad considerada. En consecuencia, para toda medida de desigualdad normalizada **I,** que admita CIU, resulta,

$$I = E[V(y, F(y))] \qquad \textbf{(31)}$$

Si la medida de desigualdad ignora CIU, se deduce,

$$V = V(y), \qquad I = E[V(y)] \qquad \textbf{(32)}$$

o sea que **V** es *separable* con respecto al rédito de cada unidad económica como sucede con los índices de Theil y de Atkinson.

A partir de (30) se obtiene,

$$\begin{aligned} &E(Y) = E(U) + E(S) = E(U) + mE(V) \\ &m = BS + PS = BS + mI \end{aligned} \qquad \textbf{(33)}$$

ÍNDICE

A partir de (30) se verifica que **U** y **S** tienen la dimensión del rédito **y,** en cambio, **V** es de dimensión cero. En (33), el operador de esperanza matemática transforma la masa del rédito total en la masa **m** = **E(Y)** y las **n** unidades económicas en una masa unidad. En consecuencia, para cada **y**, la masa de unidades con rédito **y** es la función de densidad de probabilidad (FDP) **f(y)** = **dF(y)/dy.**

El resultado (33) tiene una validez local (en el entorno del **I** observado), por aplicación de PSE. La escuela utilitarista ignora esta limitación y realiza una extrapolación mecánica e inaceptable de BS cuando **I** tiende a cero. Es decir, comete el error contrafactual que el máximo de bienestar social se alcanza cuando la distribución del rédito es perfectamente igualitaria. Se ignora deliberadamente que cambios en **U, V, S** son la consecuencia de cambios estructurales, es decir, cambios en las estructuras de comportamiento, institucionales y tecnológicas y en la infraestructura socioeconómica, las que inducen cambios en **BS** y en **I.**

El principio PRK (P.2) interpreta la acción de las fuerzas motrices que determinan a las unidades económicas y a sus sbconjuntos pertinentes a concebir, organizar y activar procesos económicos y a ofrecer y a demandar factores de la producción y bienes y servicios. Aplicando este principio a la función de utilidad (29) se deduce que **U** es una función creciente del rédito. Para toda **U** continua y dos veces diferenciable (la diferenciabilidad de segundo orden se requerirá cuando se apliquen simultaneamente P.2 y P.3) resulta,

$$dU / dy > 0, \qquad y > 0 \qquad \textbf{(34).}$$

El principio PSE (P.3) interpreta la vocación de toda sociedad, en la historia de la civilización, a aspirar y a luchar por alcanzar un estado de equidad distributiva. “La historia –escribió Jehring, citado por François Perroux (1974, p.74)– no ha conocido un solo progreso social que no haya sido arrancado de viva fuerza a los grupos dominantes”. Entre los eventos históricos en apoyo de esta afirmación citamos, la revolución francesa (1789), la guerra por la independencia de los Estados Unidos de América (1776) y la revolución de la baja nobleza inglesa que arranca la Carta Magna a Juan sin Tierra en 1212.

Descartando la hipótesis extrema e irrealista, por lo tanto contrafactual, de una populació de unidades genéticamente idénticas, con igual capacitación, igual exposición al ambiente familiar y social, y con comportamiento similar, lo que implicaría la consideración de una población de clonados, la perfecta igualdad en la distribución del rédito jamás fué el objetivo a alcanzar por las sociedades reales, menos aún el estado distributivo que maximiza su bienestar social. Al contrario, una distribución igualitaria introduciría un estado de ineficiencia económica, además de un estado de inequidad, contrariamente a la extrapolación inaceptable que realiza la escuela utilitarista, tal como ella es presentada por Pigou, Dalton, Atkinson y sus continuadores.

El objetivo social a alcanzar es la equidad, por lo tanto, la igual oportunidad para todos, la que es una exigencia de partida con equidad, pero no la igual distribución del rédito, la que implicaría una hipótesis de igualdad de llegada, cualquiera sea el punto de partida (en particular, la posesión de un conjunto idéntico de atributos genéticos) de los miembros de una población.

Por equidad entendemos que la distribución del rédito se realiza aplicando un principio de justicia distributiva, es decir, un principio de equidad social políticamente aceptada. Mas precisamente, el principio de equidad se realiza aplicando una combinación ponderada de principios de justicia distributiva tales como, a cada uno de acuerdo a su: abilidad, mérito, resultado, esfuerzo, sacrificio, contribución productiva efectiva, necesidad y, en función de la evaluación social de la contribución productiva determinada por la oferta y la demanda del mercado.

Simbolizando con **G** el índice de Gini correspondiente a la distribución del rédito observada o estimada con un modelo **F(y)** y con **G*** el índice de Gini correspondiente a la distribución **F*(y)** que una sociedad considera equitable como consecuencia de la aplicación de un principio de equidad o justicia social, se deduce, a partir de P.2 (PRK) y de P.3 (PSE),

$$dU/dy > 0, \qquad d^2U/dy^2 < 0, \text{ para todo } G \neq G^*, \qquad \textbf{(35)}$$

$$dU/dy > 0, \qquad d^2U/dy^2 = 0, \text{ cuando } F(y) = F^*(y) \Rightarrow G = G^* \qquad \textbf{(36)}$$

La (35) nos dice que la función de utilidad es **creciente y cóncava** con respecto al rédito, para toda **F(y)** $\neq$ **F*(y),** o sea, para toda **G**$\neq$ **G*.** El grado de concavidad de la función de utilidad **U** crece a medida que el valor absoluto de la diferencia **G – G*** crece. En cambio, de acuerdo con (36), la función de utilidad tiende a la función lineal **U** = **y** cuando **F(y)** $\rightarrow$ **F*(y),** por lo tanto, **G**$\rightarrow$ **G*.** Es decir, para que la distribución del rédito sea equitable, es una condición necesaria y suficiente que **F(y)** $\rightarrow$ **F*(y),** en cambio, la condición **G**$\rightarrow$ **G*** es solo necesaria pero no suficiente, dado que **G** es el funcional,

$$G : \{F(y)\} \rightarrow [0,1], \qquad \textbf{(37)}$$

o sea que **G** realiza la transformación del conjunto de funciones de distribución del rédito **{F(y)}** en el conjunto de números reales pertenecientes al intervalo unidad **[0, 1].** En consecuencia, a cada número real en el intervalo abierto **(0, 1),** es decir, a cada valor de **G,** con excepción de los valores **0** (caso de perfecta igualdad) y **1** (caso de perfecta desigualdad), le puede corresponder mas de una función de distribución (Dagum, 1980b).

ÍNDICE

De lo antes expuesto se deduce que la función de utilidad lineal es un caso particular, en vez de ser el caso general que Pareto dedujo como resultado de la interpretación que realiza del parámetro **á** de su modelo. En nuestra interpretación, se debe insistir, este es un caso límite, el que corresponde a una distribución perfectamente equitable, es decir que, **F(y)** = **F*(y),** en consecuencia, **G** = **G***. En este caso, **no existe** aversión social a la desigualdad, pues la preferencia social por la equidad (PSE) se ha alcanzado.

La tendencia a la equidad jamás se podrá alcanzar en forma estable por medio de transferencias voluntarias o forzadas del rédito y de la riqueza. Cuando estas transferencias llegan a una forma de populismo o liberismo irreflexivo e intolerante, se afecta el cumplimiento del principio de preferencia individual y social por un mayor flujo de rédito y de riqueza, al destruirse la **eficiencia económica.** En consecuencia, se afecta irremediablemente el cumplimiento del **principio de equidad,** pues sin eficiencia económica no es posible alcanzar los objetivos de una justicia distributiva. En apoyo de esta afirmación la historia de la humanidad nos ofrece ejemplos concretos. Los mas recientes, entre los mas catastróficos, son los casos reales de la ex-Unión Soviética, de los paises socialistas del este europeo, del régimen peronista en Argentina y de la globalización de la especulación financiera de fines del siglo XX.

A partir de la EFR (30) y de los resultados obtenidos en (35) y en (36), se deduce para la función de desutilidad **V**:

$$dV/dy > 0, \qquad d^2V/dy^2 > 0\text{, para todo } G \neq G^*, \qquad \textbf{(38)}$$

es decir que la función de desutilidad es **creciente y convexa** con respecto al rédito. La convexidad de **V** se deduce a partir de (30) y de (35). En efecto,

$$d^2V/dy^2 = -d^2U/dy^2 > 0\,. \qquad \textbf{(39)}$$

Para **F(y)** = **F*(y),** se deduce a partir de (30) y (36), **V** = **0,** pues en este caso es **U** = **y.**

Los procesos de cambios estructurales tendientes a alcanzar la distribución equitable del rédito **F*(y),** a la cual le corresponde un índice de Gini **G*,** generan un proceso de cambio estructural de las funciones de utilidad y de desutilidad del tipo ilustrado en la Fig. 1, tal que, cuando **F(y)** $\rightarrow$ **F*(y),** se verifica que **U(y)** $\rightarrow$ **y, V(y)** $\rightarrow$ **0,** y en consecuencia, **G** $\rightarrow$ **G*.**

A partir de la Fig. 1, y de las discusiones que nos condujeron a ellas, se deduce:

$$\mathbf{U_1 = U[y, F_1(y); G_1 \neq G^*];}$$
$$\mathbf{U_2 = U[y, F_2(y); G_1 > G_2 > G^*, o\ G_1 < G_2 < G^*];}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{U^* = U(y, F^*(y)] = y.}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{V_1 = V[y, F_1(y); G_1 \neq G^*];}$$
$$\mathbf{V_2 = V[y, F_2(y); G_1 > G_2 > G^*, o\ G_1 < G_2 < G^*];}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{V^* = V[y, F^*(y)] = 0.}$$

4. Funciones de utilidad y de desutilidad correspondientes a los índices de Gini, de Theil y de Atkinson

Los desarrollos presentados en las secciones precedentes permiten la deducción de las funciones de utilidad y de desutilidad correspondientes a los índices de Gini, de Theil y de Atkinson. Para este último se considera el caso particular **e=1,** o sea, **r=0.** La ilustración gráfica de dichas funciones se obtiene a partir de la distribución del rédito en Italia, en 1993, ajustada por el modelo de Dagum a tres parámetros (Dagum, 1998).

4.1 *Indice de Gini*

Aplicando (7), (30) y (31) se deduce,

$$V(y, f(y)) = (y/m)F(y) - L(y), \qquad \mathbf{(40)}$$

$$U(y, f(y)) = y(1 - F(y) + mL(y). \qquad \mathbf{(41)}$$

Al ser **V** y **U** en (40) y en (41) funciones del rédito y de su distribución, ellas satisfacen la propiedad P.1 de comparaciones interpersonales de utilidad y de desutilidad. Sus respectivos comportamientos gráficos para la distribución del rédito en Italia, en 1993, se ilustran en la Fig. 2.

Se puede ver claramente en la Fig. 2 lo que se puede deducir matemáticamente a partir de (40) y de (41), o sea que, la función de utilidad es monotónica creciente y cóncava, mientras que la función de desutilidad es monotónica creciente y convexa, satisfaciendo las propiedades P.2 y P.3. En síntesis, el índice de Gini satisface las tres propiedades introducidas en la Sección 3.

ÍNDICE

Con respecto a la sensibilidad del índice de Gini, Atkinson (1970, p. 256) y otros autores ignoran el factor de ponderación de la distribución del rédito para arrivar a la conclusión incorrecta que para "distribuciones típicas" el índice de Gini daría mas peso a las transferencias al centro de la distribución que a las colas. Esta afirmación de Atkinson, además de ser matemáticamente incorrecta, comete el error de considerar que las distribuciones típicas son distribuciones simétricas, cuando ellas son en general unimodales y asimétricas positivas y de lenta convergencia a cero cuando el rédito crece, es decir, son de colas pesadas. Luego Atkinson agrega, "No resulta claro si tal ponderación estaría de acuerdo con los valores sociales."

Dado que para toda distribución del rédito unimodal la frecuencia **f(ya)** de un rédito alto **ya** y la frecuencia **f(yb)** de un rédito bajo **yb** son mucho mas pequeñas que la frecuencia **f(ym)** correspondiente al valor modal **ym** no puede aceptarse la interpretación implícita que hace Atkinson para avanzar su crítica sobre la sensibilidad del índice de Gini al considerar que cada miembro perteneciente a la frecuencia **f(ya)** transfiere una unidad de rédito, la que padojalmente se transforma en una unidad de rédito recibida por cada miembro perteneciente a la frecuencia **f(yb),** si la transferencia es hecha a las unidades con rédito bajo, o se transforma en una unidad de rédito recibida por cada miembro perteneciente a la frecuencia **f(ym),** si la transferencia es hecha a las unidades con rédito **ym** . Al ser **f(ym)** > **f(ya),** resulta que la frecuencia modal **f(ym)** recibe mas de lo que la frecuencia **f(ya)** ha transferido y, ella también recibe mas de lo que hubiera recibido la frecuencia **f(yb)** de unidades con rédito bajo, por ser **f(ym)** > **f(yb).**

Al ignorar el hecho que la transferencia de una unidad de rédito del h-ésimo al i-ésimo titular de rédito no puede ser tratada como la transferencia de la cantidad de rédito **f(yh),** y que el beneficiario de la transferencia reciba la cantidad **f(yi),** Atkinson arriba a la erronea conclusión que el íindice de Gini es mas sensible a las transferencias al "centro de la distribución que a las colas". No obstante, numerosos autores siguen irreflexivamente esta afirmación sin detenerse a analizarla críticamente. En efecto, dado un ordenamiento creciente del rédito de **n** unidades económicas, se deduce para el índice de Gini,

$$G = \Delta / 2m = (2/n^2 m)\sum_{j=1}^{n}(2j-n-1)y_j \, . \qquad \textbf{(42)}$$

A partir de (42) resulta evidente que, para todo **h** > **i,** la transferencia de una unidad de rédito de la h-ésima a la i-ésima unidad, **G** decrece en proporción al número de unidades **h – i,** con rédito comprendido entre **yi** y **yh.** Por lo tanto, el índice de Gini es mas sensible cuanto mas grande es el número de unidades con réditos comprendidos entre el que transfiere y el que recibe la transferencia marginal. El máximo de sensibilidad (el impacto en la reducción) de **G** es proporcional a $\mathbf{n-1}$, el que se alcanza cuando el titular del mas alto rédito $\mathbf{y_n}$ transfiere una unidad al que posee el mas bajo rédito $\mathbf{y_1}$.

4.2. *Indice de Theil*

Haciendo uso de (8), (30) y (31), se deduce para el índice de Theil,

$$V(y) = (y/m)\log(y/m)\,, \qquad \textbf{(43)}$$

$$U(y) = y(1+\log m - \log y)\,. \qquad \textbf{(44)}$$

Al ser **U** y **V** en (43) y en (44) solo funciones del rédito de la unidad considerada, las funciones de utilidad y de desutilidad correspondientes al índice de Theil no satisfacen el principio CIU de comparaciones interpersonales de utilidad. Estas funciones son separables con respecto al rédito.

Dando a $\mu = E(Y)$ el valor del rédito medio estimado con el modelo de Dagum a tres parámetros ajustado a la distribución del rédito en Italia, en 1993, se obtienen las formas matemáticas de las funciones de utilidad y de desutilidad que se presentan en la Fig. 3. Esta figura revela con claridad, lo que se puede deducir matemáticamente a partir de (42) y de (43), que las funciones de utilidad y de desutilidad correspondientes al índice de Theil tienen un comportamiento anómalo. En efecto, la función **U** es creciente hasta alcanzar su valor máximo cuando $\mathbf{y = n\mu/e}$, decreciendo luego monotónicamente para todo valor $\mathbf{y > n\mu/e}$; su función de desutilidad decrece hasta alcanzar su valor mínimo cuando $\mathbf{y = \mu/e}$, para luego presentar un comportamiento monotónicamente creciente.

El índice de Theil, además de no satisfacer CIU, no satisface PRK, o sea, la preferencia individual y social por un mayor nivel de rédito y una mayor acumulación de capital, dado que sus funciones de utilidad y de desutilidad no presentan un comportamiento monotónico creciente, aunque la primera satisfaga la propiedad de concavidad y la segunda la de convexidad.

Este comportamiento anómalo del índice de Theil explica la mayor sensibilidad a las transferencias de los titulares de réditos altos (mayores de $\mathbf{n\mu/e}$) a los de réditos bajos (inferiores a $\mathbf{\mu/e}$). En efecto, en estos casos, la unidad que recibe la transferencia aumenta su utilidad, lo que corresponde a la teoría económica aceptada, pero disminuye su nivel de desutilidad, contradiciendo el concepto de desutilidad total y marginal del rédito. En consecuencia, tanto la unidad que transfiere como la unidad que recibe contribuyen a disminuir el nivel de desutilidad. Peor aún, la utilidad total de la unidad que hace la transferencia aumenta despues que la misma ha hecho una transferencia de rédito, debido a que la función de utilidad de Theil es decreciente a ese nivel de rédito.

4.3. *Indice de Atkinson*

A partir de la EFR (30) y de las funciones de utilidad (18)-(20) se deducen las funciones de desutilidad correspondientes al índice de Atkinson para el caso general $\mathbf{e} \geq \mathbf{0}$ y para sus casos particulares $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{e} = \mathbf{1}$. Para el caso general se deduce,

$$V(y; e \geq 0; b > 0) = \left[y - a - by^{1-e}/(1-e)\right]/m. \qquad \textbf{(45)}$$

Para $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ se obtiene la función de desutilidad lineal,

$$V(y; e = 0; 0 < b \leq 1) = \left[(1-b)y - a\right]/m. \qquad \textbf{(46)}$$

Tomando límite en (45) cuando $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{0}$ se obtiene,

$$V(y; e = 0) = \left[y - a - b\log y\right]/m. \qquad \textbf{(47)}$$

Las funciones de utilidad (19) y (20), deducidas a partir del índice de Atkinson, son monotónicas crecientes y cóncavas, satisfaciendo estas exigencias bien establecidas por la teoría económica, pero violan el principio de comparaciones interpersonales de utilidad. En cambio, si bien las funciones de desutilidad (45) y (47) son convexas, ellas no son monotónicas crecientes, violando la propiedad de comportamiento monotónico creciente de toda función de desutilidad. En efecto, ellas comienzan decreciendo hasta alcanzar un mínimo $\mathbf{y} = \mathbf{b}^{\mathbf{1/e}}$, para todo $\mathbf{e} > \mathbf{0}, \mathbf{e} \neq \mathbf{1}$, mientras que $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ cuando $\mathbf{e} = \mathbf{1}$. Esta anomalía explica porqué el índice de Atkinson, como el índice de Theil, es altamente sensible a una transferencia de rédito de una unidad con rédito alto a una unidad con rédito inferior a $\mathbf{b}^{\mathbf{1/e}}$.

La Fig. 4 ilustra las funciones de utilidad y de desutilidad correspondientes al índice de Atkinson para $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{b} = \mathbf{1}$, $\mathbf{e} = \mathbf{1}$, correspondientes a la distribución del rédito en Italia, en 1993, con media $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{E(Y)}$ estimada con el modelo de Dagum a tres parámetros.

5. Descomposición de los índices de desigualdad

A toda distribución del rédito, de la riqueza, del capital humano u otra variable, le corresponde una medida de desigualdad la cual sintetiza con un escalar la dispari-

ÍNDICE

dad relativa de los valores de la variable estudiada entre los miembros de la población objeto de investigación.

Dada una población **Q** de **n** unidades económicas, asume una gran importancia económico-social el estudio de la desigualdad del rédito de dicha población y de una partición pertinente de la misma en **k** subpoblaciones (**k** grupos) de tamaño $\mathbf{n_j \geq 2}$, y distribución observada del rédito,

$$y_{j.} = (y_{j1},..., y_{ji},..., y_{jn_j}), \qquad m_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} y_{ji}, \qquad j = 1,...,k; \qquad \sum_{j=1}^{k} n_j = n. \quad \textbf{(48)}$$

Este análisis desagregado permite un conocimiento exhaustivo de la desigualdad intra-grupo e inter-grupos y de sus relaciones con la desigualdad correspondiente a la población total.

A partir de 1967 se han propuesto varios enfoques para resolver este problema teórico y aplicado. Los mas importantes son:

1. Theil (1967) y Bhattacharya y Mahalanobis (1967) parten de la desigualdad de la población total. Theil parte de la desigualdad de base entrópica **T** que él propone mientras que Bhattacharya y Mahalanobis trabajan con el índice de Gini **G.** Estos autores descomponen la desigualdad total en dos componentes, a saber, (i) la contribución a la desigualdad total de las desigualdades intra-grupos, y (ii) la contribución a la desigualdad total de la desigualdad inter-grupos.
2. Dagum (1980, 1987b) parte del supuesto básico que el estudio de las desigualdades intra- e inter-grupos emerge cuando la población total es heterogenea, por lo tanto carece de interés el método de descomposición y se afirma la necesidad de estudiar la desigualdad de cada grupo y la **distancia direccional** inter-grupos, para lo cual los grupos son ordenados por valores crecientes del rédito medio, el que define la afluencia ecoómica media de cada grupo poblacional. Este enfoque es de mucha mas pertinencia que el de la descomposición, pues el primero ofrece una importante información cuantitativa para la formulación de políticas socioeconómicas de reducción de la disparidad inter-grupos y de las desigualdades intra-grupos, lo que no es factible con el enfoque de la descomposición. A pesar que Dagum (1980) introduce un ordenamiento **asimétrico** evidente para definir lo que llama “índice de distancia económica relativa”, donde el término “distancia” se encuentra triplemente condicionada por los adjetivos calificativos de “económica”y “relativa” y por el substantivo “índice”, Shorrocks (1982) comete el grave error de interpreter la medida propuesta por Dagum (1980) como una función de distancia, es decir,

como una distancia métrica. A partir de esta erronea interpretación, Shorrocks realiza una crítica sin fundamentos a esta contribución y a su vez se le ocurre introducir el concepto de rédito equivalente igualmente distribuido introducido por Atkinson (1970) el cual es un concepto estéril para la formulación de políticas socioeconómicas, además de la limitación de este índice que excluye toda comparación interpersonal de utilidad.

3. Varios economistas citan las observaciones infundadas de Shorrocks sin realizar análisis crítico alguno sobre la validez y la pertinencia de sus objeciones en relación con el objeto propuesto por Dagum en su contribución de 1980 y ulteriormente desarrollada en 1987. Partiendo del supuesto infundado que las críticas de Shorrocks son válidas proponen una función de distancia entre distribuciones. La primera contribución orientada en esta dirección es la de Ebert (1984). Chakravarty y Dutta (1987) analizan críticamente la contribución de Ebert y proponen axiomáticamente una función de distancia ética. Mientras Dagum ofrece una respuesta rigorosa al concepto de afluencia relativa entre distribuciones del rédito ordenadas por valores crecientes del rédito medio, la contribución de Ebert ofrece una respuesta rigorosa al concepto de disimilaridad entre distribuciones del rédito sin introducir distinción alguna entre ellas.

6. Descomposición del índice de entropía generalizada

A partir de la descomposición del vector observado del rédito de una población de tamaño **n** introducido en (48), se deduce para el índice de entropía generalizada,

$$I_b = \frac{1}{nb(b+1)} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{m} \left[\left(\frac{y_i}{m} \right)^b - 1 \right] = \frac{1}{nb(b+1)} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \frac{y_{ji}}{m} \left[\left(\frac{y_{ji}}{m} \right)^b - 1 \right]. \quad \textbf{(49)}$$

Multiplicando y dividiendo $\mathbf{y_{ji}}$, en el último miembro de (49), por $\mathbf{n_j \mu_j}$, se deduce (Dagum, 1997a,b,c),

$$I_b = I_{bw} + I_{bb} \quad \textbf{(50)}$$

tal que,

$$I_{bw} = \sum_{j=1}^{k} \frac{n_j m_j}{nm} \left(\frac{m_j}{m} \right)^b I_{bw_j} , \quad \textbf{(51)}$$

$$I_{bb} = \frac{1}{b(b+1)} \sum_{j=1}^{k} \frac{n_j}{n} \frac{m_j}{m} \left[\left(\frac{m_j}{m} \right)^b - 1 \right]. \quad \textbf{(52)}$$

El término $\mathbf{I_{bw}}$ en (50) define la contribución a la desigualdad total $\mathbf{I_{b}}$ de la desigualdad intra-grupos. Como se verifica en (51), esta contribución es una suma "ponderada" de la desigualdad $\mathbf{I_{bw_j}}$, $\mathbf{j = 1, \dots, k}$, siendo,

$$I_{bw_j} = \frac{1}{n_j b(b+1)} \sum_{i=1}^{n_j} \frac{y_{ji}}{m_j} \left[\left(\frac{y_{ji}}{m_j} \right)^b - 1 \right]. \qquad \textbf{(53)}$$

Con la excepción de los casos particulares de los índices de Theil $(\mathbf{b \to 0})$ y de Bourguignon $(\mathbf{b \to -1})$, la suma de los factores de ponderación de cada uno de los términos del segundo miembro de (51) no es igual a uno. En consecuencia, para todos los casos particulares de $\mathbf{I_{b}}$, incluyendo los índices de Theil y de Bourguignon, la descomposición de $\mathbf{I_{b}}$ en (50) no es una combinación convexa de sus términos.

El término $\mathbf{I_{bb}}$ en (50) "define" la contribución a la desigualdad total $\mathbf{I_{b}}$ de la desigualdad inter-grupos, la cual se presenta en (52). Esta llamada "contribución inter-grupos" es un abuso de lenguaje pues $\mathbf{I_{bb}}$ es el índice de entropía generalizada del vector de medias de los $\mathbf{k}$ grupos. No se puede hablar de desigualdad inter-grupos cuando cada grupo viene representado únicamente por su rédito medio. Esta inaceptable descomposición es una consecuencia de la adaptación a-crítica del análisis de la varianza, donde la hipótesis nula es la igualdad de las medias de los $\mathbf{k}$ grupos y, por lo tanto, las desviaciones de cada $\mathbf{y_{ji}}$ con respecto a la media de la población se asume que son puramente aleatorias, con varianza constante y normalmente distribuida. A su vez, la hipótesis alternativa en la descomposición de los índices de base entrópica supone que las distribuciones intra-grupos difieren en media solamente, por lo tanto las $\mathbf{k}$ distribuciones correspondientes a los $\mathbf{k}$ grupos provienen de una población con igual varianza, asimetría y desigualdad. Resulta evidente que estas hipótesis, literalmente adoptadas del análisis de la varianza, son totalmente inaceptables para obtener la descomposición de la desigualdad total en desigualdad intra- e inter-grupos. Además, la función de utilidad

$$U(y) = \frac{1}{b(b+1)} \frac{y}{m} \left[\left(\frac{y}{m} \right)^b - 1 \right], \qquad \textbf{(54)}$$

correspondiente al índice de entropía generalizada es extrictamente utilitarista pues excluye toda comparación interpersonal de utilidad (es solo función del rédito de la unidad considerada independientemente del rédito de toda otra unidad de la población), en consecuencia, invalida el concepto mismo de desigualdad inter-grupos.

ÍNDICE

Tomando límites del índice de entropía generalizada (49), o de la representación (9), la que utiliza la integral de Stieltjes-Riemann, para $\mathbf{b} \to \mathbf{0}$ y para $\mathbf{b} \to \mathbf{-1}$, se deducen, respectivamente, los índices de Theil **(T)** y de Bourguignon **(B)** y sus correspondientes descomposiciones intra- e inter-grupos (Dagum, 1997b, p. 302-303), a saber:

- Indice de Theil y su descomposición:

$$T = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\frac{y_{ji}}{m}\log\frac{y_{ji}}{m} \qquad \textbf{(55)}$$

$$T_w = \sum_{j=1}^{k}\frac{n_j m_j}{nm}\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\frac{y_{ji}}{m_j}\log\frac{y_{ji}}{m_j} \qquad \textbf{(56)}$$

$$T_b = \sum_{j=1}^{k}\frac{n_j}{n}\frac{m_j}{m}\log\frac{m_j}{m}\,; \qquad \textbf{(57)}$$

- Indice de Bourguignon y su descomposición:

$$B = \log m - \log M_g\,, \qquad \textbf{(58)}$$

$$B_w = \sum_{j=1}^{k}\frac{n_j}{n}\left(\log m_j - \log M_{gj}\right) \qquad \textbf{(59)}$$

$$B_b = \sum_{j=1}^{k}\frac{n_j}{n}\log\frac{m}{m_j} = \mathbf{\log m - \log M_{g\mu j}}, \qquad \textbf{(60)}$$

donde $\mathbf{M_g}$ en (58) es la media geométrica del rédito de la población total; en (59), $\mathbf{M_{gj}}$ es la media geométrica del rédito del **j-ésimo** grupo, y $\mathbf{M_{g\mu j}}$ es la media geométrica del vector $(\boldsymbol{\mu_1, \ldots, \mu_j, \ldots, \mu_k})$ de **k** medias aritméticas del rédito.

7. Descomposición del índice de Gini

La descomposición del índice de Gini propuesta por Bhattacharya y Mahalanobis (1967) es inadecuada por las razones siguientes:

(I) introducen la contribución a la desigualdad total **I** de la desigualdad inter-grupos $\mathbf{I_b}$ como una proposición primaria en vez de deducirla a partir de **I.**

(II) definen arbitrariamente la contribución a la desigualdad total de la desigualdad inter-grupos como el índice de Gini entre las medias $\boldsymbol{\mu_j}$ de los **k** grupos. Esta misma objeción se aplica a todos los índices de base entrópica, los que presentan, con respecto al enfoque de Bhattacharya y Mahalanobis, la ventaja ilusoria que la descomposición se deduce matemáticamente a partir del índice de desigualdad de toda la población;

(III) definen la contribución intra-grupos $\mathbf{I_w}$ como la diferencia entre el índice de Gini $\mathbf{I_b}$ entre las medias de los réditos de los **k** grupos, es decir, lo que definieron como la contribución inter-grupos a la desigualdad total. Por lo tanto,
$\mathbf{I_w = I - I_b}$;

(IV) Dagum (1997a,c) demuestra que la definición de $\mathbf{I_w}$ como un residuo presenta el inconveniente que su valor es mayor que la contribución efectiva de la desigualdad intra-grupos, con la excepción de un caso prácticamente imposible (con probabilidad cero) que las distribuciones del rédito de los **k** grupos no presenten puntos de intersección, es decir, los soportes de las **k** distribuciones son disjuntos.

A partir del índice de Gini, presentado en (5) en función de la diferencia media, y particionando la población **Q** en **k** grupos, $\mathbf{Q_j}$**, j = 1, … , k,** siendo (48) el vector de la distribución observada del **j-ésimo** grupo $\mathbf{Q_j}$**,** Dagum (1997a,b,c,) introduce una nueva descomposición del íindice de Gini. A tal efecto, se simboliza con $\mathbf{p_j}$ la proporción de la población y con $\mathbf{s_j}$ la de la masa de rédito del **j-ésimo** grupo de la población total, o sea,

$$p_j = n_j / n, \qquad s_j = n_j m_j / nm \tag{61}$$

$$\sum_{j=1}^{k} p_j = \sum_{j=1}^{k} s_j = \sum_{j=1}^{k} \sum_{h=1}^{k} p_j s_h = 1, \tag{62}$$

y se introducen las siguientes definiciones (Dagum, 1980, 1987, 1997c):

Definición 1: La diferencia media inter-grupos $\mathbf{D_{jh}}$ con respecto al rédito de los grupos $\mathbf{Q_j}$ y $\mathbf{Q_h}$ (Dagum, 1980, p.1795, 1987, p.6) es,

$$\Delta_{jh} = E\left|Y_j - Y_h\right| = \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{r=1}^{n_h} \left|y_{ji} - y_{hr}\right| / n_j n_h \tag{63}$$

ÍNDICE

Para **j** = **h,** se deduce la diferencia media intra-grupo de Gini,

$$\Delta_{jj} = E\left|Y_j - X_j\right| = \sum_{i=1}^{n_j}\sum_{r=1}^{n_j}\left|y_{ji} - y_{jr}\right| / n_j^2 \qquad \textbf{(64)}$$

siendo en este caso $\mathbf{Y_j}$, $\mathbf{X_j}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Definición 2: El índice de Gini entre los grupos $\mathbf{Q_j}$ y $\mathbf{Q_h}$ (índice de Gini **entre** estos grupos o índice de Gini inter-distribuciones) se define (Dagum, 1987, p.7),

$$G_{jh} = \Delta_{jh} / \left(m_j + m_h\right), \qquad j, h = 1,\dots,k. \qquad \textbf{(65)}$$

Para **j** = **h** se deduce el índice de Gini $\mathbf{G_{jj}}$ para el grupo $\mathbf{Q_j}$ (índice de Gini **intra-grupo**),

$$G_{jj} = \Delta_{jj} / 2m_j. \qquad \textbf{(66)}$$

A partir de las definiciones de la diferencia media inter-grupos (63) e intra-grupo (64), las que entran en las definiciones del índice de Gini inter- e intra-grupos, se observa claramente que el índice de Gini introduce explícitamente comparaciones interpersonales de utilidad al considerar la diferencia del rédito de cada unidad de un grupo con la de cada una de las unidades del mismo grupo (índice intra-grupo), o con cada unidad de un otro grupo (índice inter-grupos).

A partir de las definiciones de la diferencia media (63) y del índice de Gini (65) inter-grupos se deduce que ellos poseen la propiedad de simetría, es decir,

$$\Delta_{jh} = \Delta_{hj}, \qquad G_{jh} = G_{hj}, \qquad j, h = 1,\dots,k. \qquad \textbf{(67)}$$

Defínción 3: El grupo $\mathbf{Q_j}$ es en promedio mas rico que el grupo $\mathbf{Q_h}$ con respecto al flujo de rédito, si él posee un rédito medio mayor, o sea, $\boldsymbol{\mu_j} > \boldsymbol{\mu_h}$. La relación **mas rico que** define un orden parcial extricto sobre el conjunto de las distribuciones del rédito de los **k** grupos. Este orden parcial posee las propiedades de **asimetría** y de **transitividad,** en consecuencia, las definiciones que a continuación introducen el índice de afluencia económica relativa entre distribuciones (inter-grupos), es precisamente una **distancia económica direccional.** Interpretarla como una **función de dis-**

tancia es un grave error conceptual y matemático, el que distorciona el análisis y la interpretación del concepto asimétrico de distancia direccional. A este tipo de distorción, deliberada o no, se aplica el juicio de un eminente filosofo inglés, Bertrand Russell (1919, p.71): “the method of postulating what we want has many advantages; they are the same as the advantages of theft over honest toil”. Se aplica igualmente el certero juicio de Aristótoles cuando se refiere al error de traspasar un concepto específico de una especie a una otra especie (∝εταβασισ εισ αλλο γενοσ), es decir, un error de categoría.

Definición 4: Dado $\mu_j > \mu_h$, por lo tanto Q_j es en promedio mas afluente que Q_h, se define la afluencia económica bruta d_{jh} como el promedio ponderado de las diferencias $y_{ji} - y_{hr}$, para cada rédito y_{ji} de los miembros de Q_j mayor que el rédito y_{hr} de un miembro de Q_h. Luego,

$$d_{jh} = \int_0^\infty \left[\int_0^y (y-x)\,dF_h(x) \right] dF_j(y) \tag{68}$$

donde $F_h(x)$ representa la función de distribución acumulada (FDA) del rédito del grupo Q_h y $F_j(y)$ es la FDA del rédito del grupo Q_j.

En esta definición se observa nuevamente la propiedad asimétrica de **djh,** con la excepción del caso de variables con igual rédito medio, el cual no satisface la relación **mas rico que.**

Definición 5: Dado $\mu_j > \mu_h$, se define el momento de transvariación de orden uno (Gini, 1916, 1959; Dagum, 1959, 1960, 1961) p_{jh} entre las distribuciones del rédito de los grupos Q_j y Q_h como el promedio ponderado de la diferencia $y_{hr} - y_{ji}$ para cada rédito y_{hr} de Q_h mayor que el rédito y_{ji} de cada miembro de Q_j. Luego,

$$p_{jh} = \int_0^\infty \left[\int_0^y (y-x)\,dF_j(x) \right] dF_h(y). \tag{69}$$

El concepto de transvariación fué introducido por Gini (1916) para medir la intensidad de la diferencia cuantitativa de un atributo entre dos grupos poblacionales considerando los casos de diferencias de signo opuesto al signo de la diferencia entre sus respectivas medias.

ÍNDICE

Dagum (1980, 1987, 1997d) resuelve las integrales en (68) y en (69) obteniendo,

$$d_{jh} = E_j(YF_h) + E_h(YF_j) - E_h(Y), \quad \textbf{(70)}$$

$$p_{jh} = E_j(YF_h) + E_h(YF_j) - E_j(Y). \quad \textbf{(71)}$$

A su vez, a partir de las definiciones 1, 4 y 5, se deduce,

$$\Delta_{jh} = d_{jh} + p_{jh}. \quad \textbf{(72)}$$

El símbolo **E** representa el operador de esperanza matemática y su subíndice indica la función de distribución con respecto a la cual se obtiene la esperanza matemática, siendo,

$$E_j(YF_h) = \int_0^\infty yF_h(y)dF_j(y), \qquad E_j(Y) = m_j. \quad \textbf{(73)}$$

A partir de (70)-(71) se deduce,

$$0 \leq p_{jh} < \frac{1}{2}\Delta_{jh} < d_{jh} \leq \Delta_{jh}, \qquad \forall m_j > m_h, \quad \textbf{(74a)}$$

$$0 \leq p_{jh} \leq \frac{1}{2}\Delta_{jh} \leq d_{jh} \leq \Delta_{jh}, \qquad \forall m_j \geq m_h. \quad \textbf{(74b)}$$

Dagum (1987b, p.7) demuestra que $\mathbf{p_{jh}}$, = **0** y $\mathbf{d_{jh}}$ = $\mathbf{D_{jh}}$ si y solamente si la función de densidad $\mathbf{f_h(y)}$ (FD) está totalmente a la izquierda de la FD $\mathbf{f_j(y)}$, es decir que las dos distribuciones no se intersecan (no hay transvariación). En cambio, si y solamente si $\mathbf{m_j}$ = $\mathbf{m_h}$, se deduce, $\mathbf{p_{jh}}$ = $\mathbf{d_{jh}}$ = $\mathbf{(1/2)D_{jh}}$.

Definición 6: Dado $\mathbf{m_j} > \mathbf{m_h}$, la afluencia económica neta entre las distribuciones del rédito de los grupos $\mathbf{Q_j}$ y $\mathbf{Q_h}$ es igual a $\mathbf{d_{jh} - p_{jh}}$. Este valor define la afluencia económica neta en la unidad monetaria considerada (dimensión uno), es decir, al neto de la transvariación $\mathbf{p_{jh}}$ existente entre los dos grupos, pasándose del origen $\mathbf{(1/2)D_{jh}}$ para la afluencia económica bruta $\mathbf{d_{jh}}$ al origen **0** para la afluencia económica neta.

ÍNDICE

A partir de (74a,b) se deduce que el máximo de las afluencias económicas bruta y neta es igual a $\mathbf{D_{jh}}$, la que se obtiene cuando $\mathbf{p_{jh}} = \mathbf{0}$ (transvariación cero).

Definición 7: Definición de la distancia económica direccional y relativa (affluencia económica relativa) entre distribuciones.

La distancia económica direccional y relativa o afluencia económica relativa (AER) $\mathbf{D_{jh}}$ entre las distribuciones del rédito de los grupos $\mathbf{Q_j}$ y $\mathbf{Q_h}$ es igual al cociente entre la afluencia económica neta y el valor máximo que la misma puede alcanzar. En consecuencia, aplicando las definiciones 1 y 6 y teniendo en cuenta (74), se obtiene,

$$D_{jh} = (d_{jh} - p_{jh}) / \Delta_{jh} = (d_{jh} - p_{jh}) / (d_{jh} + p_{jh}) . \qquad \mathbf{(75)}$$

$\mathbf{D_{jh}}$ es un índice de desigualdad direccional entre distribuciones pues él mide la distancia relativa de la distribución del rédito del grupo $\mathbf{Q_j}$ con media $\mathbf{m_j}$ mayor que la media $\mathbf{m_h}$ del grupo $\mathbf{Q_h}$. $\mathbf{D_{jh}}$ asume valores en el intervalo $\mathbf{[0, 1]}$, es decir, $\mathbf{D_{jh}}$ $\mathbf{[0, 1]}$. Es igual a cero cuando $\mathbf{m_j} = \mathbf{m_h}$, en consecuencia, $\mathbf{d_{jh}} = \mathbf{p_{jh}}$. Toma el valor uno cuando $\mathbf{p_{jh}} = \mathbf{0}$, es decir, cuando no existe transvariación entre las dos distribuciones, o sea que, $\mathbf{y_{ji}} > \mathbf{y_{hr}}$, para todo $\mathbf{i, i = 1, \ldots, n_j}$, y para todo $\mathbf{r, r = 1, \ldots, n_h}$. El valor de $\mathbf{D_{jh}}$ crece a medida que la distribución del rédito de $\mathbf{Q_j}$ se desplaza a la derecha y/o aumenta su asimetría positiva con respeto a la distribución del rédito de $\mathbf{Q_h}$; tiende a uno cuando la distribución de $\mathbf{Q_j}$ está completamente a la derecha de la de $\mathbf{Q_h}$. En síntesis, $\mathbf{D_{jh}}$ es sensible a cambios en la media, la varianza, la asimetría y la desigualdad de las distribuciones consideradas.

La **Definición 7** introduce el índice de afluencia económica relativa neta $\mathbf{D_{jh}}$ y la **Definición 2** el índice de Gini $\mathbf{G_{jh}}$ entre las distribuciones del rédito de $\mathbf{Q_j}$ y $\mathbf{Q_h}$, cuando $\mathbf{m_j} > \mathbf{m_h}$. Su producto, el que se presenta en la Definición 8, introduce un importante concepto para el nuevo enfoque propuesto por Dagum (1997c) para la descomposición del índice de Gini.

Definición 8: El producto $\mathbf{G_{jh}D_{jh}}$, ponderado por la parte del rédito y de la población de $\mathbf{Q_j}$ y de $\mathbf{Q_h}$, mide la contribución neta a la desigualdad total $\mathbf{G}$ de la desigualdad entre las dos distribuciones. Es neta porqué ella mide la contribución a la desigualdad total al neto de la transvariación *(overlapping)* entre las dos distribuciones consideradas. A su vez, el correspondiente valor ponderado del producto $\mathbf{G_{jh}(1 - D_{jh})}$ mide la contribución de la transvariación entre las distribuciones del rédito de $\mathbf{Q_j}$ y de $\mathbf{Q_h}$. La suma de estos dos productos nos da la contribución bruta a la desigualdad total de la desigualdad entre las dos distribuciones.

La descomposición entre contribución neta y contribución de la transvariación a la desigualdad total no puede realizarse con los índices de base entrópica por la extrema simplicidad de los mismos, en particular, al excluir toda comparación interpersonal de utilidad.

Las definiciones mas arriba introducidas serán utilizadas en la nueva descomposición del índice de Gini, la que se presenta a continuación.

A partir de la descomposición de Bhattacharya y Mahalanobis (1967), varios autores se han ocupado de la descomposición del índice de Gini. Entre ellos mencionamos, Rao (1969), Das y Parikh (1982), Silber (1989, Yitzhaki (1994) y Yitzhaki y Lerman (1991). Deutsch y Silber (1999) presentan nuevos desarrollos a partir de la contribución de Dagum (1997b,c,d).

Dada la población **Q** de **n** unidades económicas y su partición en **k** grupos introducida en (48), se deduce para el índice de Gini,

$$G = \Delta / 2m = \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} | y_i - y_r | / 2n^2 m =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{h=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{r=1}^{n_h} | y_{ji} - y_{hr} | / 2n^2 m \qquad \textbf{(76)}$$

Aplicando a (76) la **Definición 1,** se deduce,

$$G = \sum_{j=1}^{k} \sum_{h=1}^{k} n_j n_h \Delta_{jh} / 2n^2 m. \qquad \textbf{(77)}$$

Aplicando a (77) la **Definición 2** y la propiedad de simetría (67) del índice de Gini intra- e inter-grupos, se obtiene,

$$G = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \sum_{h=1}^{k} G_{jh} (p_h s_j + p_j s_h) = p'(G_{jh}) s = s'(G_{jh}) p =$$
$$= \sum_{h=1}^{k} G_{jj} p_j s_j + \sum_{j=1}^{k} \sum_{h=1}^{j-1} G_{jh} (p_h s_j + p_j s_h) \qquad \textbf{(78)}$$

donde $(\mathbf{G_{jh}})$ simboliza la matriz simétrica de orden **k×k** de los índices de Gini intra- e inter-grupos. En la diagonal principal de esta matriz se presentan los índices de Gini intra-grupo de cada uno de los **k** grupos poblacionales. De acuerdo con (62), la suma de los factores de ponderación en (78) es igual a uno.

Aplicando la **Definición 8** al último miembro de (78) y teniendo en cuenta el ordenamiento

$$m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_k \,, \qquad \textbf{(79)}$$

resulta,

$$G = \sum_{h=1}^{k} G_{jj}\, p_j s_j + \sum_{j=1}^{k}\sum_{h=1}^{j-1} G_{jh} D_{jh} (p_h s_j + p_j s_h) + \sum_{j=1}^{k}\sum_{h=1}^{j-1} G_{jh} (1 - D_{jh})(p_h s_j + p_j s_h) = \\ = G_w + G_b + G_t \,, \qquad \textbf{(80)}$$

siendo,

$$G_w = \sum_{h=1}^{k} G_{jj}\, p_j s_j \,, \qquad \textbf{(81)}$$

la contribución a la desigualdad total **G** de la desigualdad intra *(within)* grupos. La contribución a la desigualdad total **G** de la desigualdad inter *(between)* grupos es,

$$G_b = \sum_{j=1}^{k}\sum_{h=1}^{j-1} G_{jh} D_{jh} (p_h s_j + p_j s_h) \,, \qquad \textbf{(82)}$$

y la contribución a la desigualdad total **G** de la transvariación inter-grupos es,

$$G_t = \sum_{j=1}^{k}\sum_{h=1}^{j-1} G_{jh} (1 - D_{jh})(p_h s_j + p_j s_h) \,, \qquad \textbf{(83)}$$

Debe observarse:

(1) el término $\mathbf{G_{jj}\ p_j\ s_j}$ en (81) es la contribución ponderada a la desigualdad intra-grupo $\mathbf{G_w}$ de la desigualdad intra-grupo $\mathbf{G_{jj}}$;
(2) el término $\mathbf{G_{jh} D_{jh} (p_h s_j + p_j s_h)}$ en (82) es la contribución ponderada a la desigualdad inter-grupos $\mathbf{G_b}$ de la desigualdad inter-grupos $\mathbf{G_{jh}}$ (entre el **j-ésimo** y el **h-ésimo** grupo);
(3) el término $\mathbf{G_{jh} (1 - D_{jh})(p_h s_j + p_j s_h)}$ en (83) es la contribución ponderada a la desigualdad $\mathbf{G_t}$ de la desigualdad debida a la transvariación entre el **j-ésimo** y el **h-ésimo** grupo.

La Tabla 1 aplica la descomposición de los índices de Gini y de entropía generalizada, considerando para este último los casos particulares de los índices de Theil y de Bourguignon, a la distribución del rédito en Italia, en 1995 (Banca d'Italia, 1995), particionando la población total en tres grupos: Sur, Centro y Norte.

A partir de los datos de la encuesta de la Banca d'Italia, la Tabla 1 presenta los valores de $\mathbf{n}_j$, $\mathbf{p}_j$, $\mathbf{s}_j$, la media aritmética $\mathbf{m}_j$, la media geométrica $\mathbf{M}_{gj}$ y los índices de Gini (linea 7), de Theil (linea 12) y de Bourguignon (linea 15) para cada región y para toda Italia. La linea 6 presenta la distancia económica relativa y direccional $\mathbf{D}_{jh}$ para cada combinación binaria de las regiones italianas, tal que, $\mathbf{m}_j > \mathbf{m}_h$.

Las lineas 8, 13 y 16 de la Tabla 1 presentan la contribución ponderada de la desigualdad intra para cada región al valor de la desigualdad intra-regiones $\mathbf{I}_w$ correspondientes a los índices de Gini, Theil y Bourguignon, respectivamente. La desigualdad intra-regiones $\mathbf{I}_w$, para los tres índices considerados, se presenta en la última columna; para cada índice, su valor es igual a la suma de los valores obtenidos en las tres columnas precedentes.

La linea 9, presenta el índice de Gini y la linea 11 el valor de la transvariación para cada combinación binaria de regiones (índice inter-regiones). A su vez, las lineas 10, 14 y 17 presentan las contribuciones ponderadas de la desigualdad inter-regiones. Para el índice de Gini es verdaderamente contribución inter-regiones pues considera todas las combinaciones binarias de regiones, en cambio, los índices de Theil y de Bourguignon consideran solo la media del rédito de cada región. Para las lineas 10, 14 y 17, la suma de los valores de las tres primeras columnas es igual a la contribucion a la desigualdad total $\mathbf{I}$, de la desigualdad inter-regiones $\mathbf{I}_b$, la que se presenta en la última columna..

Las lineas 6 a 11 testimonian con claridad y rigor la pertinencia de todos los valores obtenidos con la descomposición propuesta para el índice de Gini. En cambio, a diferencia de los valores obtenidos en la linea 10 con el índice de Gini para la contribución inter-regional, las lineas 14 y 17 correspondientes a los índices de Theil y de Bourguignon presentan valores inaceptables pues la contribución ponderada de algunas regiones a la desigualdad inter-regiones es negativa. Para el caso del índice de Theil, la región Sur, que es la región mas pobre y presenta la mas alta desigualdad, contribuye a reducir la desigualdad inter-regional; peor aún, su valor es negativo, por lo tanto, no solo que carece de toda racionalidad económico-social, sino que el mismo es un resultado absurdo inherente a la forma matemática de los índices de entropía generalizada. En efecto, a partir de (49) se deduce, para todo $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, que todo grupo o región con un rédito medio $\mathbf{m}_j$ mas pequeno que el rédito medio ì de la población total, la contribucion de este grupo a la desigualdad inter-grupos $\mathbf{I}_{bb}$ es negativa. En cambio, para todo $\mathbf{b} < \mathbf{0}$, los grupos con rédito medio superior al rédito medio de la población total contribuyen con un valor negativo a la desigualdad inter-grupos, como sucede con el índice de Bourguignon.

Con la excepción de la contribución ponderada de la desigualdad inter-grupos para los índices de Theil y de Bourguinon (por la presencia de algunos términos con valores negativos, lo que destruye la validez de estos índices y, por la misma razón, de todos los miembros del índice de entropía generalizada), para los restantes argumentos analizados en la Tabla 1, los tres índices considerados ofrecen un comportamiento coherente. Para los tres índices (Gini, Theil y Bourguignon), el Centro es la región con la distribución del rédito menos desigual, le sigue el Norte, mientras que el Sur presenta la mas alta desigualdad. Por otra parte, el Norte tiene un rédito medio ligeramente superior al del Centro. Este último es igual al 98.2% del rédito medio en el Norte y es un 44.8% mayor que en el Sur.

Si se observa que las regiones Norte y Centro son economías mucho mas desarrolladas que la del Sur, las que a su vez cuentan con una importante presencia de pequeñas y medianas empresas, contando el Norte con la radicación de grandes empresas y el Centro con la concentración de la burocracia nacional en Roma, se puede explicar porqué el Norte, con un rédito medio un poco mayor que el del Centro, tiene una desigualdad en la distribución del rédito mayor que la del Centro.

8. Distancia económica direccional o, afluencia económica relativa

Se demuestra matemáticamente y, en la Tabla 1, se verifica empíricamente que la descomposición del índice de entropía generalizada y, *a fortiori,* las de sus casos particulares, presenta valores negativos para la contribución ponderada de algunos grupos a la desigualdad inter-grupos. Esta anomalía se agrava cuando $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$**,** pues cuanto mas pobre es un grupo, mayor será su contribución **a reducir** la desigualdad inter-grupos. Además, la descomposición se inspira erroneamente en el análisis de la varianza. Parte de la desigualdad total para deducir las contribuciones intra- e inter-grupos a dicha desigualdad. Esta última, la desigualdad inter-grupos, carece de toda validez cuando, como en la descomposición de los índices de Theil y de Bourguignon y, en Bhattacharya y Mahalanobis, se deduce la desigualdad inter-grupos a partir de la media del rédito de cada grupo. Siendo los grupos heterogeneos, no solo por sus valores medios sino también por las diferencias entre sus varianzas y asimetrías, por lo tanto, entre los índices de desigualdad intra-grupos, se necesita introducir un nuevo enfoque que parta del análisis quantitativo de las distribuciones inter-grupos. Esta es la idea de base en la contribución de Dagum (1980, 1987b).

Por otra parte, la descomposición de índices de desigualdad no provee información útil para la formulación de políticas socioeconómicas. Cual sería la recomendación de una política socioeconómica que se podría ofrecer a un ministro de planificación a quién se le informa que la contribución a la desigualdad total de la desigualdad inter-grupos es muy grande? Si el econometrista trabajó con el índice de Theil tendría que aconsejarle la reducción del rédito medio de las subpoblaciones (grupos) mas ricas o de empobrecer los grupos mas pobres a fin de reducir la desigualdad inter-grupos? En fin de cuenta, esta absurda consecuencia de la descomposición del índice de Theil, como se puede verificar quantitativamente en la Tabla 1, excluye la utilización de este índice. Además, la inaceptabilidad epistemológica del método del análisis de la varianza adoptado para descomponer el índice de Theil, al considerar únicamente la media del rédito de cada grupo, da necesariamente lugar a una contribución artificialmente muy pequeña a la desigualdad total de la desigualdad inter-grupos.

Para superar todas estas limitaciones de descomposición de los índices de desigualdad de base entrópica es necesario cambiar el método de análisis. A tal efecto, se parte de la media del rédito y de la desigualdad de cada grupo y se introduce un índice de desigualdad direccional entre los grupos poblacionales. Este índice de desigualdad direccional rinde cuenta de la afluencia económica relativa de la distribución con media mayor con respecto a la que presenta un rédito medio menor.

Si se identifican **k** grupos (tales como regiones geográficas, años de escolaridad, edades, condición profesional y sexo), la población total se particiona (por definición de partición, son grupos mutuamente disjuntos y colectivamente exhaustivos) en **k** grupos. Al **j-ésimo** grupo le corresponde la media $\mathbf{m_j}$**,** la numerosidad $\mathbf{n_j}$**,** y el índice de desigualdad de Gini $\mathbf{G_j}$**,** para **j = 1, … , k.** A su vez, para la población total se tiene, $\mathbf{n = S n_j}$**,** $\mathbf{m = S n_j m/n}$**, y** el índice de Gini **G.**

En la sección precedente se presentó un conjunto de definiciones, las que Dagum (1997b,c,d) introdujo para definir una nueva descomposición del índice de Gini. Entre ellas, la **Definición 7** introduce el índice de afluencia económica relativa y direccional entre el **j-ésimo** y el **h-ésimo** grupo,

$$D_{jh} = (d_{jh} - p_{jh}) / \Delta_{jh} = (d_{jh} - p_{jh}) / (d_{jh} + p_{jh}), \qquad j, h = 1, \ldots, k \, , \qquad \textbf{(84)}$$

siendo,

$$0 \le D_{jh} \le 1 \text{, para todo } m_j \ge m_h \, . \qquad \textbf{(85)}$$

La **Definición 4** introduce la afluencia económica bruta $\mathbf{d_{jh}}$**,** la que se expresa matemáticamente en (68) y cuya solución se presenta en (70). La **Definición 5** introduce el momento de transvariación de orden uno $\mathbf{p_{jh}}$**,** cuya representación matemática se encuentra en (69) y su correspondiente solución en (71). $\mathbf{p_{jh}}$ es una media ponderada de los casos en los cuales el rédito de los miembros de la población mas pobre $\mathbf{Q_h}$ son mayores que el rédito de los miembros de la población mas rica $\mathbf{Q_j}$. En consecuencia, la diferencia **djh – pjh** define la afluencia económica neta entre las

ÍNDICE

distribuciones del rédito de los grupos $\mathbf{Q_j}$ y $\mathbf{Q_h}$, la que se introduce en la **Definición 6.** Ella tiene la dimensión de la unidad monetaria considerada.

Dado que $\mathbf{D_{jh} = d_{jh} + p_{jh}}$, siendo $\mathbf{D_{jh}}$ la diferencia media entre las distribuciones del rédito de los grupos $\mathbf{Q_j}$ y $\mathbf{Q_h}$, la que se introdujo en la **Definición 1,** el cociente entre la afluencia económica neta y su valor máximo deducido en (74b) define la afluencia económica relativa $\mathbf{D_{jh}}$, la que toma valores en el intervalo cerrado **[0, 1].** Mas precisamente, teniendo en cuenta (74a), la que excluye el caso $\mathbf{m_j = m_h}$, el cual corresponde a la hipótesis nula de afluencia económica bruta y neta igual a cero, $\mathbf{D_{jh}}$ toma valores en el intervalo semiabierto por la izquierda **(0, 1],** es decir que cero es su máximo limite inferior.

Una otra forma de arrivar a $\mathbf{D_{jh}}$ es a partir de (74b). En efecto, siendo $\mathbf{(1/2)D_{jh}}$ el valor mínimo al que tiende $\mathbf{d_{jh}}$ y el valor máximo al que tiende $\mathbf{p_{jh}}$ cuando $\mathbf{m_h \to m_j}$, si se substrae $\mathbf{(1/2)D_{jh}}$ de cada miembro de (74b) se obtiene,

$$0 \le d_{jh} - \frac{1}{2}\Delta_{jh} \le \frac{1}{2}\Delta_{jh},$$

es decir,

$$0 \le \frac{1}{2}(d_{jh} - p_{jh}) \le \frac{1}{2}\Delta_{jh}, \qquad \textbf{(86)}$$

de donde se deduce que la mitad de la afluencia económica neta toma valores entre cero y $\mathbf{(1/2)D_{jh}}$. Dividiendo por este último valor cada uno de los miembros de (86) se deducen las equaciones (84) y (85).

A continuación analizamos la distancia económica relativa (AER) y direccional entre las regiones Norte, Centro y Sud de Italia.

Asignando el subíndice 1 al Sur, el 2 al Centro y el 3 al Norte, se obtiene para las medias del rédito de cada región, en miles de liras italianas (linea 2 de la Tabla 1),

$$\mathbf{m_1 = 32\ 622;} \qquad \mathbf{m_2 = 47\ 224;} \qquad \mathbf{m_3 = 40\ 088,}$$

siendo en consecuencia, $\mathbf{m_1 < m_2 < m_3}$. La linea 6 de la Tabla 1 presenta la afluencia económica relativa (y direccional) entre regiones y la linea 7 el índice de Gini intra-región $\mathbf{G_{jj}}$ para cada región y para toda Italia (la población total).

La Tabla 2 presenta los resultados de AER a la distribución del rédito por regiones, conjuntamente con los tamaños muestrales, las medias del rédito y los índices de Gini para cada región y para toda Italia, en 1995.

A partir de la Tabla 2 se observa que el Sur es en media la región mas pobre de Italia y la que presenta una mas alta desigualdad en la distribución del rédito por regiones. Su rédito medio es solo un 69.1% del rédito medio del Centro y un 67.8% del rédito medio del Norte. A su vez, los valores del rédito medio y de la desigualdad

ÍNDICE

en el Norte y en el Centro son muy similares. El rédito medio del Centro es ligeramente inferior al del Norte (representa un 98.2%), en cambio, el índice de Gini es un 5.5% inferior, o sea que, presentando el Centro un rédito medio inferior de solo 1.8%, presenta la ventaja con respecto al Norte de tener un índice de Gini 5.5% inferior.

El análisis que se acaba de realizar se refleja con rigor en los valores de AER (Tabla 2). En efecto, los índices de afluencia económica relativa del Centro y del Norte con respecto al Sur son muy grandes; sus respectivos valores son $\mathbf{D_{21} = 0.483}$ y $\mathbf{D_{31} = 0.493}$. En cambio, AER del Norte con respecto al Centro es $\mathbf{D_{32} = 0.027}$.

A fin de decidir estadísticamente si la afluencia económica relativa entre dos distribuciones del rédito es o no significativamente diferente de cero, cuando $\mathbf{m_j > m_h}$, Dagum (1980, 1987) propuso como un test aproximado el test $\mathbf{D^+}$ de Kolmogorov-Smirnov **(K-S)** para un solo lado y entre dos muestras. Se demuestra (Gnedenko, 1962, p.396) que para grandes muestras tiende a:

$$4n_j n_h (D^+)^2 /(n_j + n_h) = c^2(2)\,,$$

es decir que la transformación del estadístico $\mathbf{D^+}$ de **K-S** converge a una distribución chi-cuadrada con dos grados de libertad. El valor crítico del estadístico chi-cuadrado para un nivel de significación del 5% es $\mathbf{c^2_{.05}(2) = 5.99}$.

Aplicando este test a AER para el caso de las distribuciones del rédito entre las regiones italianas en 1995, se concluye:

(i) Las AERs del Norte y del Centro con respecto al Sur son altamente significativas. Teniendo en cuenta que la distribucion del rédito en el Sur es mas desigual que las del Centro y del Norte, y estas últimas distribuciones presentan un rédito medio mayor que al Sur, se concluye que las distribuciones del rédito en el Norte y en el Centro son preferidas a las del Sur, por ofrecer un mayor bienestar social medio y tener mejor distribuido este bienestar social entre sus respectivas poblaciones.

(ii) La afluencia económica relativa del Norte con respecto al Centro acepta la hipótesis nula, en consecuencia, estadísticamente son igualmente afluentes. Si la diferencia entre sus correspondiente índices de Gini acepta la hipótesis nula se concluye que ambas distribuciones del rédito son igualmente preferibles. Si en cambio, la hipótesis nula es rechazada, la distribución con menor desigualdad es la preferida, en este caso, la del Centro.

La última linea de la Tabla 2 presenta el tamaño muestral, la media del rédito y el índice de Gini para toda Italia.

Los resultados presentados en la Tabla 2 y su interpretación demuestran claramente las ventajas conceptuales y analíticas y sus implicaciones para la formulación de políticas socioeconómicas del método que se acaba de presentar con respecto al de la descomposición. Mas aún, los índices de desigualdad de base entrópica deben ser rechazados por las anomalías que ellos presentan y que fueron analizadas en la sección precedente. Basta observar en la Tabla 1 lo que pasa con el índice de Theil cuando se estima la “contribución” del Sur al valor de la desigualdad inter-grupos, la que es negativa (-0.068), siendo la contribución a la desigualdad total de la desigualdad inter-grupos igual a 0.015. Es decir que el Sur, siendo mas pobre y presentando una mayor desigualdad en la distribución del rédito con respecto al Norte y al Centreo, contribuye enormemente a reducir la desigualdad inter-grupos hasta casi cancelarla. Esta anomalía se agrava por el hecho que todos los índices de base entrópica no admiten comparaciones interpersonales de utilidad y de desutilidad. Por ello, como se puede observar en la Tabla 1 para el índice de Theil, la contribución de cada región a la desigualdad inter-grupos es solo una función de la parte de la población y de la parte del rédito medio de cada región con respecto a la población y al rédito medio de toda la población. Es decir que los índices de base entrópica presentan la incongruencia que lo que llaman contribución inter-grupos, es solo la contribución de cada grupo, a través de la consideración exclusiva de su rédito medio, con ignorancia de las distribuciones de los restantes grupos.

Las anomalías e incongruencias que presenta la descomposición de los índices de base entrópica no se observan en la descomposición del índice de Gini propuesta por Dagum (1997a,b,c). Sin embargo la descomposición del índice de Gini es menos informativa si se la compara con los resultados obtenidos aplicando el método de la afluencia económica relativa tanto para la interpretación y análisis de las desigualdades inter- e intra-grupos como para la formulación de políticas socioeconómicas de reducción de la disparidad inter-grupos y de la desigualdad intra-grupos.

9. Distancia métrica entre distribuciones

La contribución de Dagum (1980) fué erroneamente interpretada por Shorrocks (1982) como una función de distancia (distancia métrica) a pesar que el concepto de distancia económica relativa y su formulación matemática son claramente direccionales, por lo tanto cumplen con la propiedad de asimetría, desde el momento que se comenzaba ordenando en forma creciente las medias del rédito y se confirmaba con la formulación matemática de la definición de distancia económica relativa. Dicho error interpretativo indujo a otros autores a proponer funciones de distancia métrica cayendo así en un juego matemático sin valor alguno para el análisis de la desigualdad inter-grupos.

El índice AER propuesto por Dagum estima la relación **“mas rico que”** entre grupos de distribuciones del rédito, teniendo en cuenta la media, la varianza, la asimetría y la desigualdad que presentan la distribución de cada grupo. Para todo matemático, la relación **“mas rico que”** es una relación asimétrica, por lo tanto, interpretarla como una relación simétrica, y el índice AER como una distancia métrica es un grave error de categoría.

Dagum (1987, p.8) observa que las funciones de distancia (distancia métrica) miden el grado o intensidad de la diferenciación o disimilaridad entre vectores, en nuestro caso, dichos vectores son los vectores de distribuciones del rédito, sin tener en cuenta una relación de orden como la media del rédito, ni la desigualdad de cada distribución.

La medida de distancia entre distribuciones mas conocida y frecuentemente citada es la propuesta por Ebert (1984). La función de distancia de orden $\mathbf{r}, \mathbf{r} \geq \mathbf{1}$, propuesta por Ebert, para los grupos poblacionales $\mathbf{Q_j}$ y $\mathbf{Q_h}$, es

$$d(r; F_j, F_h) = \left[\int_0^1 \left| y_j(p) - y_h(p) \right|^r dp \right]^{\frac{1}{r}}, \qquad r \geq 1, \qquad \mathbf{(88)}$$

siendo,

$$\mathbf{p = F_j(y_j) = F_h(y_h).}$$

La función de distancia (88) es la media quadrática generalizada de orden $\mathbf{r}, \mathbf{r} \geq \mathbf{1}$ de los valores absolutos de las diferencias de los quantiles entre las distribuciones del rédito consideradas. Ella define el índice de disimilaridad introducido por Gini (1914b, 1965). Efectivamente, la (88) mide la disimilaridad entre distribuciones del rédito, es decir, la discrepancia estructural, sin introducir juicio de valor alguno sobre la preferencia de una distribución sobre otra o, como Chakavarty y Dutta (1986) observan, no permiten evaluar las preferencias de bienestar social. En consecuencia, la medida de distancia propuesta por Ebert no puede rendir cuenta de la relación asimétrica **“mas rico que”** (en media del rédito) pues, para cada cuantil, ella adiciona el valor absoluto $|\mathbf{y_j} - \mathbf{y_h}|\mathbf{r}$, para cada combinación binaria de unidades económicas, independientemente de la relación de afluencia $\mathbf{y_j} > \mathbf{y_h}$ o $\mathbf{y_j} < \mathbf{y_h}$, tal que, una unidad pertenece al grupo $\mathbf{Q_j}$ y la otra al grupo $\mathbf{Q_h}$ (Dagum, 1987, p.9).

Para $\mathbf{r} = \mathbf{1}$ se deduce,

$$d(1; F_j, F_h) = \int_0^1 \left| y_j(p) - y_h(p) \right| dp, \qquad \mathbf{(89)}$$

la cual es igual a la suma de los valores absolutos de las areas comunes entre $\mathbf{F_j(y)}$ y $\mathbf{F_h(y)}$. Si estas funciones de distribución acumuladas no se intersecan, se deduce inmediatamente que $\mathbf{d(1; F_j, F_h)}$ es igual al valor absoluto de la diferencia entre las esperanzas matemáticas de sus correspondientes variables aleatorias. Mas aún, si para todo **p, yj(p)** > **yh(p),** es decir que, para todo **y, Fj(y)** < **Fh(y)** (caso de dominación estocástica de primer orden), se deduce,

$$d(1;F_j,F_h)=\int_0^1 y_j(p)dp-\int_0^1 y_h(p)dp=\int_0^\infty ydF_j(y)-\int_0^\infty ydF_h(y) \quad \textbf{(90)}$$

$$=E_j(Y)-E_h(Y)=m_j-m_h$$

10. Conclusión

Para los índices de Gini, de Atkinson, y para los casos particulares de Theil y de Bourguignon del índice de entropía generalizada, se han analizado la existencia de fundamentos de bienestar social y la sensibilidad a las transferencias de los titulares de réditos altos a los de rédito bajos. Se demostró que, dada la media del rédito, existe una relación dual entre los índices de desigualdad y las funciones de bienestar social y entre las correspondientes funciones de utilidad y de desutilidad. Por lo tanto, todos estos índices tienen fundamentos de bienestar social. Sin embargo, el índice de Gini es el único que admite comparaciones interpersonales de utilidad y de desutilidad, mientras que los otros las excluyen, por lo tanto, a estos últimos índices les corresponden funciones extrictamente utilitaristas al ser funciones unicamente del rédito de la unidad que se considera, independientemente del rédito de toda otra unidad económica.

Las funciones de utilidad y de desutilidad de los índices de desigualdad permiten analizar la relativa sensibilidad de los mismos a transferencias de rédito entre unidades económicas.

Se demuestra que las funciones de utilidad y de desutilidad correspondientes al índice de Gini se comportan de acuerdo a lo que enseña la teoría económica, en cambio, la función de desutilidad del índice de Atkinson y las funciones de utilidad y de desutilidad de los índices de base entrópica (Theil , Bourguignon, etc.) tienen un comportamiento anómalo, pues dichas funciones no presentan un comportamiento monotónico creciente (cóncavo para las funciones de utilidad y convexo para las de desutilidad). Se demuestra que esta anomalía introduce una sensibilidad artificial a las transferencias de unidades económicas con rédito alto a las que tienen un rédito inferior al rédito que corresponde al mínimo que presentan las funciones de desutilidad. En cambio, para el índice de Gini, se demuestra que la sensibilidad crece cuanto mas distante está, en el ordenamiento del rédito, la unidad que transfiere con respecto a la unidad que recibe la transferencia, contradiciendo las críticas infundadas formuladas contra este importante y rigoroso índice de desigualdad.

ÍNDICE

Se discute luego el problema de la descomposición de los índices de Gini, de Theil y de Bourguignon, demostrándose la superioridad de la descomposición del índice de Gini con respecto a los otros. Los índices de base entrópica presentan valores anómalos para la contribución de los grupos a la desigualdad inter-grupos, lo que invalida su uso para rendir cuenta de la contribución a la desigualdad total de la desigualdad inter-grupos. Además, los índices de base entrópica consideran solo la media del rédito de cada grupo, asumiendo implícitamente que todos los grupos tienen la misma varianza, asimetría y desigualdad, en la estimación de la desigualdad inter-grupos, lo que ciertamente contradice la realidad observada, convirtiéndose así en un simple juego matemático.

Como alternativa al método de la descomposición se analiza el método que introduce y formaliza la distancia económica relativa y direccional (afluencia económica relativa) entre distribuciones, presentándose sus ventajas comparativas y sus implicaciones de política socioeconómica con respecto al método de la descomposición.

Finalmente se analiza el enfoque de la distancia métrica y se demuestra que el mismo responde a la relación de **"disimilaridad"** o **"disparidad"** entre distribuciones pero no puede dar cuenta de la relación **"mas rico que"** debido a la propiedad de simetría que poseen las funciones de distancia (distancia métrica).

En consecuencia, se concluye que el índice de Gini es superior a los índices de desigualdad que se han propuesto para remplazarlo, pues el mismo posee funciones de utilidad y de desutilidad bien comportadas, las que admiten comparaciones interpersonales de utilidad y de desutilidad, es descomponible y su sensibilidad crece cuanto mas distantes se encuentra la unidad que transfiere de la unidad que recibe la transferencia de rédito.

Bibliografía

ATKINSON, A. B. (1970): "On the measurement of inequality", *Journal of Economic Theory*, 2, 244-263.

BANCA D'ITALIA (1995): "I bilanci delle famiglie italiane nell'anno 1993", *Supplementi al Bollettino Statistico*, V, 9.

BENTHAM, J. (1789): "Introduction to the principles of morals and legislation", *The works of Jeremy Bentham*, 1, New York: Russel and Russel, Inc., 1962.

BERGSON, A. (1938): "A reformulation of certain aspects of welfare economics", *Quarterly Journal of Economics*, 52, 2, 310-334.

BERGSON, A. (1954): "On the concept of social welfare", *Quarterly Journal of Economics*, 68, 233-252.

BHATTACHARYA, N. AND MAHALANOBIS, B. (1967): “Regional disparities in household consumption in India”, *Journal of the American Statistical Association*, 62, 143-161.

BOURGUIGNON, F. (1979): “Decomposable income inequality measures”, *Econometrica*, 47, 901-902.

BRESCIANI-TURRONI, C. (1910): “Una misura della disuguaglianza”, en *Studi in onore di Biagio Brugi,* Palermo: Tipografia L. Gaipa, 794-812.

CHAKRAVARTY, S. R. AND BHASKAR D. (1987): “A Note on Measures of Distance between Income Distributions”, *Journal of Economic Theory,* 41 (1), 185-188.

DAGUM, C. (1959): “Transvariazione fra piú di due distribuzioni”, *Memorie di metodologia statistica*, II, *Transvariazione*, C. Gini, ed., Roma: Libreria Goliardica.

DAGUM, C. (1960): “Teoria de la transvariacion sus aplicaciones a la economia”, *Metron*, XX, 1-206.

DAGUM, C. (1961): “Transvariacion en La Hipotesis de Variables Aleatorias Normales Multidimensionales”, *Proceedings of the International Statistical Institute*, Vol. XXXVIII, Book 4, Tokyo, 473-486.

DAGUM, C. (1979): “A mean generating function for the assessment of estimator biases”, *Economie Appliquée*. XXXII, 1, 81-93.

DAGUM, C. (1980a): “Inequality measures between income distributions with applications”, *Econometrica*, 48, 7, 1791-1803.

DAGUM, C. (1980b): “The generation and distribution of income, the Lorenz curve and the Gini ratio”, *Economie Appliquée*, XXXIII, 2, 327-367.

DAGUM, C. (1987a): “Gini ratio”, *The New Palgrave: a Dictionary of Economics*, Volume II, J. Eatwell, M. Milgate and P. Newman, eds., London: Macmillan Press, 529-532.

DAGUM, C. (1987b): “Measuring the economic affluence between populations of income receivers”, *Journal of Business and Economic Statistics*, 5, 5-12.

DAGUM, C. (1990): “On the relationship between income inequality measures and social welfare functions”, *Journal of Econometrics*, 43, 1-2, 91-102.

DAGUM, C. (1993): “The social welfare bases of Gini and other income inequality measures”, *Statistica*, LII, 3-30.

DAGUM, C. (1993): “Fundamentos de bienestar social de las medidas de desigualdad en la distribción de la renta”, *Cuadernos de Ciencias Económicas y Empresariales*, Año 17, n. 24, 11-36.

DAGUM, C. (1995a): “The scope and method of economics as a science”, *Il Politico*, LX, 1,5-39.

DAGUM, C. (1995): “Income Inequality Measures and Social Welfare Functions: An Unified Approach”, *Income Distribution, Social Welfare, Inequality, and Poverty*, C. Dagum and A. Lemmi, editors, JAI Press, Greenwich, Connecticut, U.S.A., 177-199.

DAGUM, C. (1996): “Quelques réflexions sur les fondements micro de la macroéconomique et les fondements macro de la microéconomique”, *Cérémonie d’attribution du grade de Docteur Honoris Causa de l’Université de Montepellier I*, Faculté des Sciences Economiques, Université de Montpellier I, 11-18.

DAGUM, C. (1997a): “Universidad, economía y sociedad”, *Statistica*, LVII, 2, 239-260.

DAGUM, C. (1997b): “Scomposizione ed interpretazione delle misure di disuguaglianza di Gini e di entropia generalizzata”, *Statistica*, LVII, 3, 295-308.

ÍNDICE

DAGUM, C. (1997c): "Decomposition and interpretation of Gini and the generalized entropy inequality measures", *Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section*, 129-134.

DAGUM, C. (1997d): "A new approach to the decomposition of the Gini income inequality ratio", *Empirical Economics*, 22, 4, 515-531.

DAGUM, C. (1998): "Fondements de bien-ètre social et décomposition des mesures d'inégalité dans la répartition du revenu", Tenth Invited Lecture in Memory of Francois Perroux, Collège de France, *Economie Appliquée*, Tome LI, n.4, 151-202.

DAGUM, C. (1999): "Fundamentos de la economía como ciencia social", *Revista del Centro de Investigaciones Económicas de Córdoba (CIEC),* XX, 4, 11-24, y en *Revista Centro Cultural Canadá,* n.16, 1999, 36-52.

DAGUM, C. AND LEMMI, A., eds (1995): *Income distribution, social welfare, inequality, and poverty*, Volume VI, in The Collection Research on Economic Inequality edited by D. S. Slottje, Greenwich (Connecticut): JAI Press.

DALTON, H. (1920): "The measurement of the inequality of incomes", *Economic Journal*, 30, 348-361.

DAS, T. AND A. PARIKH (1982): "Decomposition of Inequality Measures and a Comparative Analysis", *Empirical Economics*, 7, 23-48.

DESCARTES, R. (1637): "Discours de la méthode", English version in *The Philosophical Works of Descartes*, Vol. 1, Cambrige: Cambrige University Press, 1931.

DEUTSCH, J. AND SILBER, J. (1999): *On some Implications of Dagum's Interpretation of the Decomposition of Gini Index by Population Subgroups*, in D.S. Slottje, ed., 269-291.

EBERT, U. (1984): "Measures of distance between income distributions", *Journal of Economic Theory*, 32, 266-274.

GINI, C. (1910): "Indici di concentrazione e di dipendenza", *Atti della III Riunione della Societá Italiana per il Progresso delle Scienze*, et en C. Gini (1955), 3-120.

GINI, C. (1914): "Sulla misura della concentrazione e della variabilitá dei caratteri", *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, et en C. Gini (1955), 411-459.

GINI, C. (1916): "Il concetto di transvariazione e le sue prime applicazioni", *Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica*, et en C. Gini, ed. (1959), 21-44.

GINI, C. (1921): "Measurement of Inequality of Incomes", *The Economic Journal,* 31, 124-126.

GINI, C., (1955): *Memorie di metodologia statistica*, I, *Variabilitá e concentrazione*, Roma: Libreria Eredi Virgilio Veschi.

GINI, C., ed. (1959): *Memorie di metodologia statistica*, II, *Transvariazione*, Roma: Libreria Goliardica.

GINI, C. (1965): "La dissomiglianza", *Metron,* 24, 85-215.

GINI, C., BARBENSI, G., GALVANI, L., PIZZETTI, E., GATTI, S. (1957): *Le medie*, Torino: UTET.

HOOD, W C. AND KOOPMANS, T. C., eds. (1953): *Studies in econometric method*, New York: J. Wiley.

PARETO, V. (1895): “La legge della domanda”, *Giornale degli Economisti*, 59-68.

PARETO, V. (1896): *Ecrits sur la courbe de la répartition de la richesse*, Oeuvres Complétes de Vilfredo Pareto pubbliées sous la direction de Giovanni Busino, Genève: Librairie Droz, 1965.

PARETO, V. (1897): *Cours d’économie politique*, Nouvelle Edition publiée sous la direction de G. H. Bousquet et G. Busino, Genève: Librairie Droz, 1964.

PARETO, V. (1913): “Il massimo di utilitá per una collettivitá in sociologia”, *Giornale degli Economisti*, XLVI, 3, 337-341.

PARETO, V. (1916): *Traité de sociologie générale*, Genève: Librairie Droz.

PENA TRAPERO, J.B. (1977): *Problemas de mediciones del biènestar y conceptos afines*, Madrid: Instituto Nacional de Estadistica.

PERROUX, F. (1974): “Le économie de la ressource humain”, *Mondes en développement*, 7, 17-81.

RAO, V. M. (1969): “Two decomposition of concentration ratio”, *Journal of the Royal Statistical Society*, CXXXII. A, 418-425.

ROBBINS, L. (1935): *Essay sobre la naturaleza y significado de la ciencia económica*, Mexico: Fondo de Cultura Económica, 1944.

ROUSSEAU, J. J. (1755): *Discours sur l’origine de l’inégalité.* Traducción inglesa en J. J. Rousseau: *On the Origin and foundation of the Origin of Inequality of Mankind.* Chicago: The Great Books Foundation, 1955.

RUSSELL, B. (1919): *Introduction to mathematical philosophy*, London: George Allen and Unwin.

SAMUELSON, P. A. (1947): *Foundations of economic analysis*, Cambridge: Harvard University Press.

SEN, A. K. (1973): *On economic inequality*, Oxford: Oxford University Press.

SHORROCKS, A. F. (1982): “On the distance between income distributions”, *Econometrica*, 50, 1337-1339.

SILBER, J. (1989): “Factor components, population subgroup, and the computation of the Gini index of inequality”, *Review of Economics and Statistics*, 71, 107-115.

SLOTTJE, D. editor (1999): *Advances in econometrics, income distribution, and scientific methodology, Essays in honor of Camilo Dagum*, Heidelberg-New York: Physica-Verlag (Springer-Verlag).

STUDENSKI, P. (1958): *The income of nations*, New York: New York University Press.

THEIL, H. (1967): *Economics and information theory*, Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

WELCH, C. (1987): “Utilitarianism”, *The New Palgrave: a Dictionary of Economics*, Volume IV, J. Eatwell, M. Milgate and P. Newman, eds., London: Macmillan Press, 770-776.

YITZHAKI, S. (1994): “Economic Distance and Overlapping of Distributions”, *Journal of Econometrics*, 61, 147-159.

YITZHAKI S. AND R. I. LERMAN (1991): “Income Stratification and Income Inequality”, *Review of Income and Wealth*, 37 (3), 313-329.

ZARZOSA ESPINA, P. (1996): *Approximación a la medición del biènestar social*, Valladolid: Secretariado de Publicaciones, Universidad de Valladolid.

ÍNDICE

Tabla 1. Descomposición de los índices de desigualdad de Gini, de Theil y de Bourguignon para la distribución del rédito por regiones en Italia, en 1995

Descomposición de los índices de Gini, de Theil, y de Bourguignon	*Regiones*			*Total*
	$j = 1$: Sur	$j = 2$: Centro	$j = 3$: Norte	
1. Tamaño muestral n_j	$n_1 = 2868$	$n_2 = 1661$	$n_3 = 3606$	$n = 8135$
2. Media del rédito $ì_j$	$ì_1 = 32622$	$ì_2 = 47224$	$ì_3 = 48088$	$ì = 42813$
3. Fracción de la población p_j	$p_1 = 0.331$	$p_2 = 0.183$	$p_3 = 0.486$	$p_j = 1$
4. Fracción del rédito s_j	$s_1 = 0.252$	$s_2 = 0.202$	$s_3 = 0.546$	$s_j = 1$
5. Media geométrica M_{gj}	$M_{g1} = 24716$	$M_{g2} = 39053$	$M_{g3} = 38832$	$M_g = 33477$
6. Distancia económica relativa y direccional D_{jh}	$D_{21} = 0.483$	$D_{31} = 0.493$	$D_{32} = 0.027$	
7. Indice de Gini (*intra*) $G_{wj} = G_{jj}$	$G_{w1} = 0.375$	$G_{w2} = 0.329$	$G_{w3} = 0.348$	$G = 0.363$
8. Indice de Gini (*intra*) ponderado $p_j s_j G_{jj}$	0.027	0.013	0.096	$G_w = 0.136$
9. Indice de Gini (*inter*) G_{jh}	$G_{21} = 0.38$	$G_{31} = 0.39$	$G_{32} = 0.34$	
10. Contribución ponderada *neta* del índice de Gini (*inter*) $G_{bjh} = (p_j s_h + p_h s_j) G_{jh} D_{jh}$	$G_{b21} = 0.0207$	$G_{b31} = 0.0580$	$G_{b32} = 0.0018$	$G_b = 0.0805$
11. Transvariación (*inter*) G_{tjh}	$G_{t21} = 0.0221$	$G_{t31} = 0.0597$	$G_{t32} = 0.0653$	$G_t = 0.1471$
12. Indice de Theil (*intra*) $T_{wj} = T_{jj}$	$T_{w1} = 0.243$	$T_{w2} = 0.183$	$T_{w3} = 0.214$	$T = 0.230$
13. Indice de Theil (*intra*) ponderado $s_j T_{wj}$	0.061	0.037	0.117	$T_w = 0.215$
14. Indice de Theil ponderado (*inter*) $p_j (ì_j/ì) \log (ì_j/ì)$	-0.068	0.020	0.063	$T_b = 0.015$
15. Indice de Bourguignon (*intra*) B_{wj}	$B_{w1} = 0.277$	$B_{w2} = 0.190$	$B_{w3} = 0.214$	$B = 0.246$
16. Indice de Bourguignon (*intra*) ponderado $p_j B_{wj}$	0.092	0.035	0.104	$B_w = 0.2305$
17. Indice de Bourguignon (*inter*) ponderado $p_j \log (ì/ì_j)$	0.090	-0.018	-0.056	$B_b = 0.0155$

Tabla 2. Afluencia económica relativa entre regiones en italia, 1995

Región \ *Región*	*Centro*	*Norte*	*Tomaño de la* muestra n_j	*Media* $ì_j$	*Indice de Gini* G_j
Sud	0.483	0.493	2868	32622	0.375
Centro		0.027	1661	47224	0.329
Norte			3606	48088	0.348
Italia (total)			8135	42813	0.363