Estudios de Economía Aplicada
N 3, 1995. Págs.13-36

Los sistemas financieros a través de la teoría algebraica de autómatas

Salvador CRUZ RAMBAUD
Universidad de Almería

Abstract

This paper describes the financial systems as the families of financial laws indexed on the set of positif integer numbers, using as tool the algebraic concept of automaton. Also we introduce the simply composed systems, which are a generalization of the simply multiplicatif systems, and the simply additif systems, which also generalize the classical additif systems. In both cases, the structure of distributive lattice appears.

Key-words: Automaton; Financial law; Financial system; Lattice.

Resumen

En este artículo se describen los sistemas financieros como familias de leyes financieras indizadas en el conjunto de los números enteros positivos, utilizando como herramienta el concepto algebráico de autómata. Se introducen dos tipos de sistemas financieros: los sistemas simplemente compuestos, que son una generalización de los sistemas simplemente multiplicativos, y los sistemas simplemente sumativos que también generalizan los sistemas sumativos clásicos. En ambos casos, aparecen estructuras de retículo distributivo.

Palabras clave: Autómata; Ley financiera; Sistema financiero; Retículo.

Código UNESCO: 0508.

1 Introducción

No cabe duda de que el modelo matemático en el que actualmente se basa el concepto de ley financiera es lo suficientemente amplio como para dar cabida a la totalidad de las operaciones financieras que se llevan a cabo en las diferentes actividades económicas en las que son precisos determinados cálculos financieros.

Sin embargo, la imaginación financiera hace que surjan nuevos productos que nos hacen recapacitar sobre la amplitud de la axiomática sobre la que se asienta la Matemática de las Operaciones Financieras. Con el ánimo precisamente de "relajar" el concepto de ley financiera, introducimos un nuevo enfoque utilizando como herramienta la Teoría Algebráica de Autómatas (Sección 2).

Así, en la Sección 3, definimos una ley financiera $\mathcal{L}$ como un "mecanismo" que transforma capitales en capitales como consecuencia de la acción de un input en forma de "impulso" temporal sobre los primeros, dando lugar a los segundos, produciéndose, por consiguiente, un "cambio de estado".

En la Sección 4, una vez que se ha dado una definición algebráica de ley financiera, introducimos el concepto de sistema financiero como una familia de leyes financieras, indizada por el conjunto de los números enteros $\mathcal{Z}$. Además, establecemos una metodología para construir una ley financiera $\mathcal{L}''$ a partir de otras dos, $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$, que coinciden en los desplazamientos temporales múltiplos de $n'' = m.c.m.(n, n')$, siendo $A = n\mathcal{Z}$ y $A' = n'\mathcal{Z}$ los conjuntos inputs de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$, respectivamente. Este teorema da lugar a una familia de leyes financieras que tiene la estructura de retículo distributivo y que llamaremos sistema financiero simplemente compuesto, que, en el caso de que las leyes financieras sean homogéneas de grado uno con respecto a la cuantía, darán, como caso particular, los sistemas simplemente multiplicativos ya conocidos.

Haciendo ahora hipótesis sobre la evolución del interés de dos leyes financieras $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$, podemos generar el concepto de sistema financiero simplemente sumativo que generaliza el concepto de sistema simplemente sumativo formado por leyes homogéneas. Este sistema financiero tiene también estructura reticular distributiva.

En efecto, dadas dos leyes financieras $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$, cuyas sumas de intereses elementales coinciden sobre los múltiplos de $n'' = m.c.m.(n, n')$, siendo $A = n\mathcal{Z}$

y $A' = n'\mathcal{Z}$ los conjuntos inputs de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$, respectivamente, podemos generar otra ley financiera $\mathcal{L}''$ con $A'' = m.c.d.(n, n')\mathcal{Z}$ como conjunto input y cuyas sumas de intereses elementales coinciden con las de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ en desplazamientos comunes.

Si las leyes financieras que componen el sistema financiero son, además, estacionarias, obtendremos los conceptos de sistema ampliamente compuesto / sumativo.

2 Semiautómatas y autómatas

2.1 Concepto de semiautómata

Un ***semiautómata*** es una terna

$$\mathcal{S} = (Z, A, \delta)$$

consistente en dos conjuntos no vacíos Z y A y una función

$$\delta : Z \times A \longrightarrow Z.$$

Z es llamado el ***conjunto de estados***, A el ***alfabeto input*** y δ la "función de próximo estado" de $\mathcal{S}$.

2.2 Concepto de autómata

Un ***autómata*** es una quíntupla

$$\mathcal{A} = (Z, A, B, \delta, \lambda)$$

donde

$$(Z, A, \delta)$$

es un semiautómata, B es un conjunto no vacío llamado *alfabeto output* y

$$\lambda : Z \times A \longrightarrow B$$

es la "función output".

Si $z \in Z$ y $a \in A$, entonces interpretaremos $\delta(z, a) \in Z$ como el próximo estado en que z es transformado por el input a. $\lambda(z, a) \in B$ es el output de z resultante del input a. Así cuando el autómata está en el estado z y recibe el input a, cambia al estado $\delta(z, a)$ con output $\lambda(z, a)$.

Primer grupo de comportamiento

- Número de alevines: 65.000
- Peso medio inicial de los alevines: 1 gr.
- Coste de un alevin: 50 pts.

Segundo grupo de comportamiento

- Número de alevines: 65.000
- Peso medio inicial de los alevines: 1.6 gr.
- Coste de un alevin: 60 pts.

Datos técnicos

- Número de estanques de preengorde: 12
- Capacidad de los estanques de preengorde: 6.5 m^3
- Número de estanques de engorde: 16
- Capacidad de los estanques de engorde: 100 m^3

Datos económicos

- Coste de mano de obra: 4.000.000 pts.
- Precio estimado de ventas en Kg.: 1.800 pts.
- Amortización en los tres primeros años: 7.500.000 pts.
- Precio medio de 1 kg. de pienso: 110 pts.
- Año comienzo del cultivo: 1992.

d) $\delta_1 : Z \times A \longrightarrow Z/(t,a) \mapsto \delta_1(t,a) = t + a$ es una acción del grupo $(A,+)$ sobre el conjunto Z.

e) $\lambda_1 : Z \times A \longrightarrow FC_{\mathcal{R}}/(t,a) \mapsto \lambda_1(t,a)$ es una función que cumple las siguientes condiciones:

(a) $\forall t \in Z;\ \forall a, a' \in A$,

$$\lambda_1(t + a, a') \circ \lambda_1(t,a) = \lambda_1(t, a + a').$$

(b) $\forall t \in Z;\ \forall a \in A;\ \forall x \in A^+,\ x \neq 0$,

$$\lambda_1(t,a) < \lambda_1(t, a + x).$$

(c) $\forall t \in Z;\ \forall a \in A;\ \forall x \in A^+,\ x \neq 0$,

$$\lambda_1(t, a + x) - \lambda_1(t,a) \in FC_{\mathcal{R}}.$$

(d) $\forall t \in Z;\ \forall a \in A;\ \forall x,\ y \in A^+$,

$$\lambda_1(t, a + x) - \lambda_1(t,a) \leq \lambda_1(t, a + x + y) - \lambda_1(t, a + y).$$

2. Y consideremos, además, el siguiente semiautómata:

$$\mathcal{S} = (B, FC_{\mathcal{R}}, \delta_2),$$

donde:

a) B es un subconjunto de $\mathcal{R}$: $B \subseteq \mathcal{R}$.

b) $\delta_2 : B \times FC_{\mathcal{R}} \longrightarrow B/(C,f) \mapsto \delta_2(C,f) = f(C)$ es una acción del grupo $(FC_{\mathcal{R}}, \circ)$ sobre B.

Pues bien, se llama *ley financiera* a la serie de composición $\mathcal{L} = \mathcal{A}\#\mathcal{S}$ de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$ definida como el semiautómata

$$(Z \times B, A, \delta),$$

con:

$$\delta((t,C),a) = (\delta_1(t,a), \delta_2(C, \lambda_1(t,a))),$$

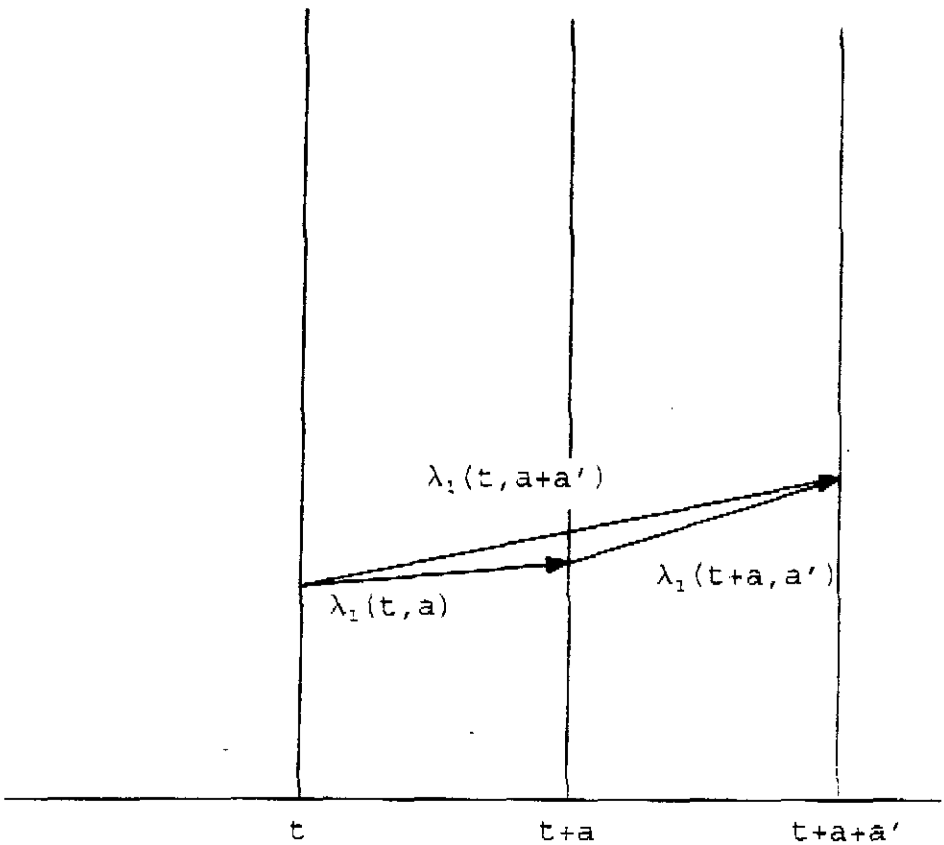
es decir:

$$\delta((t,C),a) = (t + a, \lambda_1(t,a)(C)),$$

3.2 Interpretación geométrica

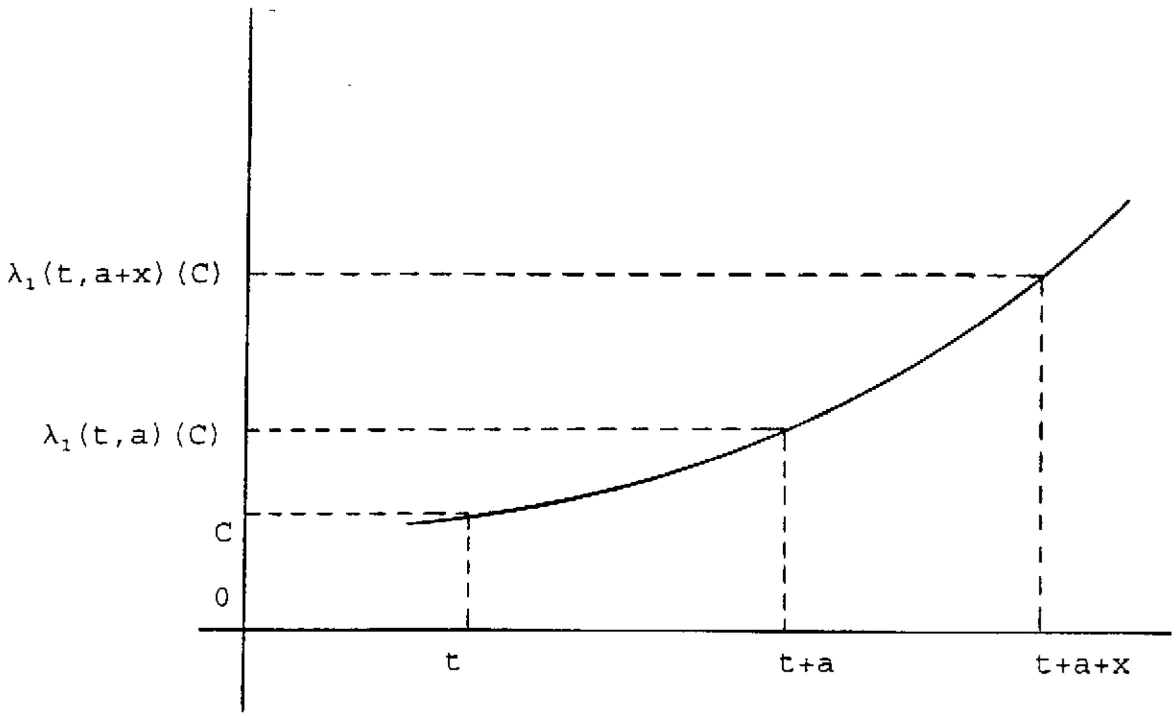
Condición 1: Un capital financiero puede "moverse libremente" por una curva de indiferencia:

Figura 1



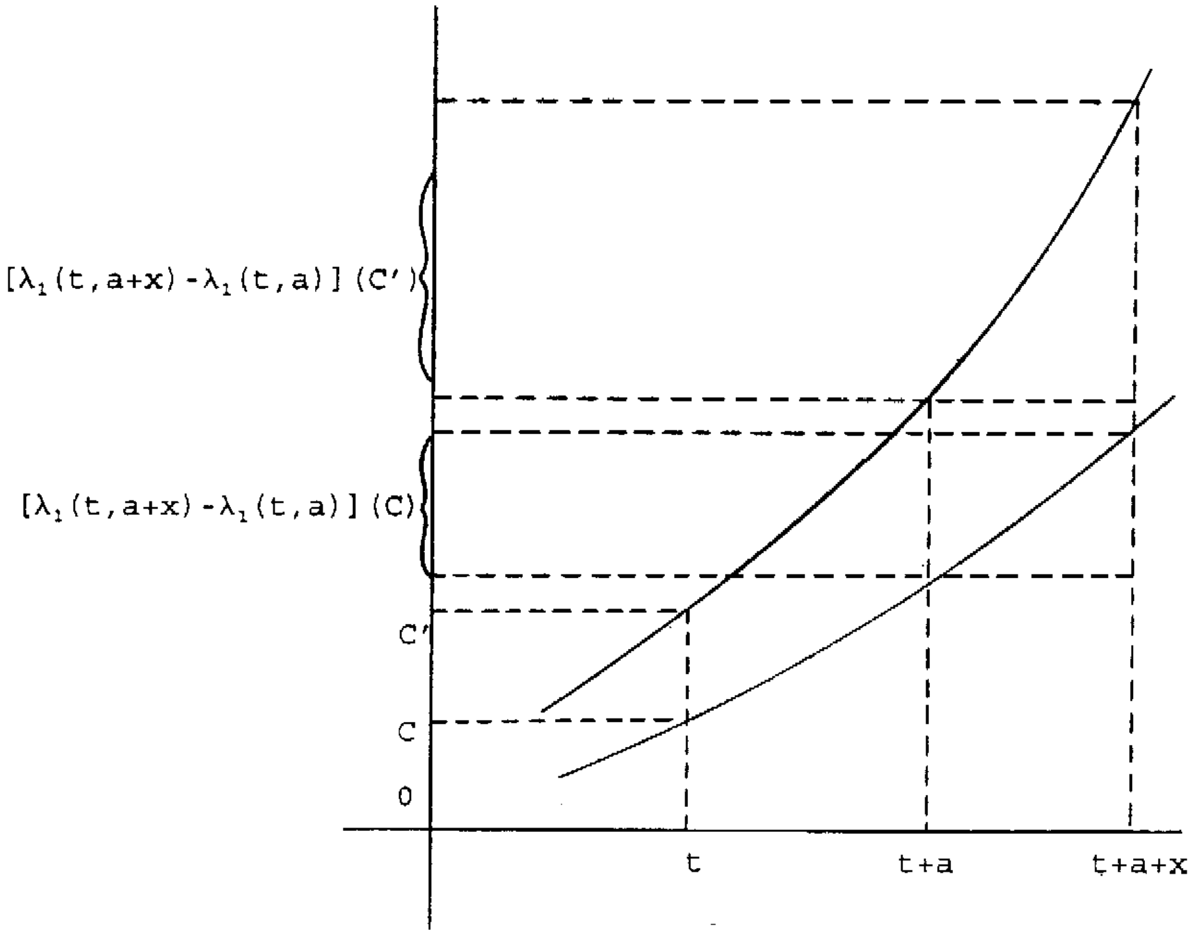
Condición 2: Las curvas de indiferencia son estrictamente crecientes:

Figura 2



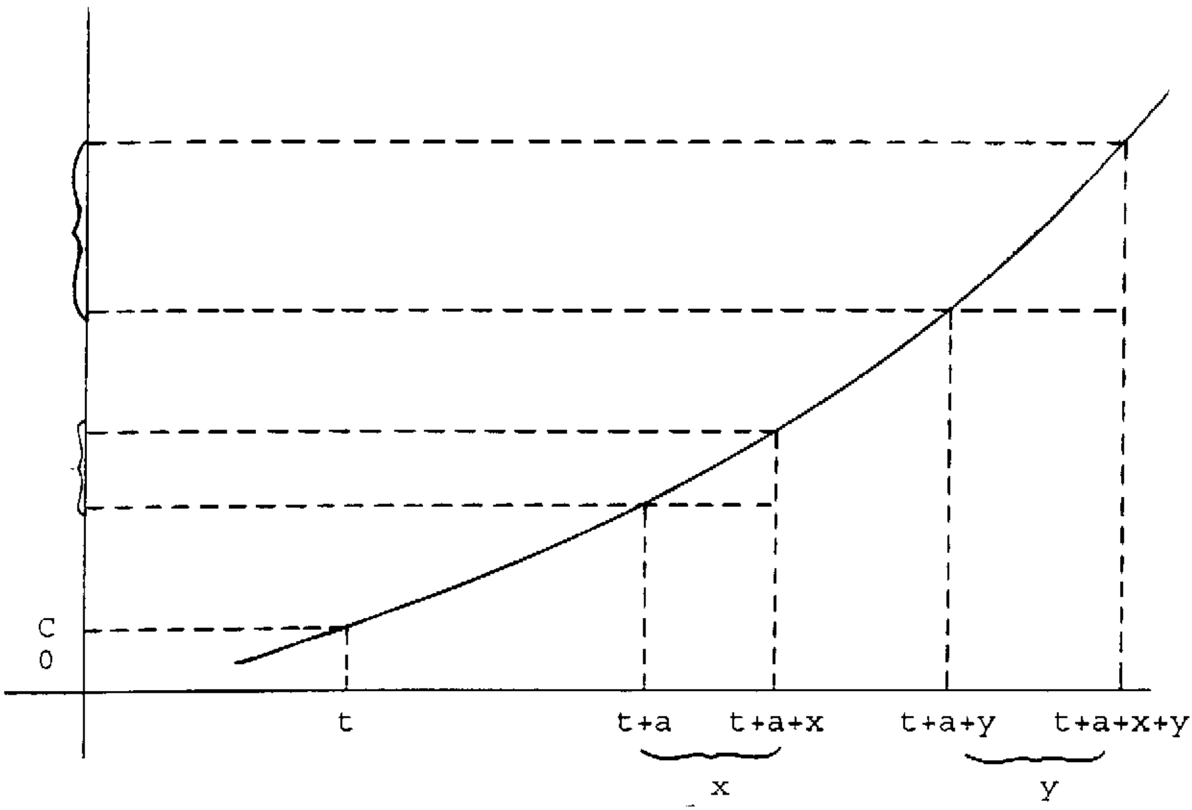
Condición 3: Si una curva de indiferencia está por encima de otra, su pendiente es mayor:

Figura 3



Condición 4: Las curvas de indiferencia son cóncavas (estrictamente o no):

Figura 4



3.3 Consecuencias de la definición de ley financiera

1. $\lambda_1(t,0) = Id_{\mathcal{R}}$; $\forall t \in Z$.

   En efecto, $\forall t \in Z$; $\forall a \in A$,

   $$\lambda_1(t,a) \circ \lambda_1(t,0) = (\text{por la primera condición de ley financiera}) =$$
   $$= \lambda_1(t,a+0) = \lambda_1(t,a) = \lambda_1(t,a) \circ Id_{\mathcal{R}} \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow \lambda_1(t,a) \circ \lambda_1(t,0) = \lambda_1(t,a) \circ Id_{\mathcal{R}}.$$

   Como $\lambda_1(t,a)$ es estrictamente creciente $\Rightarrow$

   $\Rightarrow \lambda_1(t,a)$ es inyectiva $\Rightarrow$

   $\Rightarrow \lambda_1(t,a)$ es simplificable por la izquierda $\Rightarrow \lambda_1(t,0) = Id_{\mathcal{R}}$.

2. $\lambda_1(t,a) < \lambda_1(t,a+x)$; $\forall t \in Z$; $\forall a \in A$; $\forall x \in A^+$, $x \neq 0 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \lambda_1(t,0) < \lambda_1(t,x)$; $\forall t \in Z$; $\forall a \in A$; $\forall x \in A^+$, $x \neq 0$.

   i) $\Leftarrow$).- En efecto, $\forall t \in Z$; $\forall a \in A$; $\forall x \in A^+$, $x \neq 0$,

   $$\lambda_1(t,a+x) = (\text{por la primera condición de ley financiera}) =$$
   $$= \lambda_1(t+a,x) \circ \lambda_1(t,a) >$$
   $$> (\text{como } \lambda_1(t+a,x) > \lambda_1(t+a,0) = Id_{\mathcal{R}}) > \lambda_1(t,a).$$

   ii) $\Rightarrow$).- En efecto, basta con tomar $a = 0$.

3. $\lambda_1(t,a) > \lambda_1(t,a+x)$; $\forall t \in Z$; $\forall a \in A$; $\forall x \in A^-$, $x \neq 0 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \lambda_1(t,0) > \lambda_1(t,x)$; $\forall t \in Z$; $\forall a \in A$; $\forall x \in A^-$, $x \neq 0$.

   La demostración es análoga a la anterior.

4. $\lambda_1(t+x,a) < \lambda_1(t,a+x)$; $\forall t \in Z$; $\forall a \in A$; $\forall x \in A^+$, $x \neq 0$.

   En efecto, por la primera condición de ley financiera,

   $$\lambda_1(t+x,a) \circ \lambda_1(t,x) = \lambda_1(t,a+x) \Rightarrow$$
   $$\lambda_1(t+x,a) = \lambda_1(t,a+x) \circ \lambda_1(t+x,-x) <$$
   $$< (\text{por la consecuencia 3. de la definición de ley financiera}) <$$
   $$< \lambda_1(t,a+x) \circ Id_{\mathcal{R}} = \lambda_1(t,a+x).$$

5. $\lambda_1(t+x, a-x) < \lambda_1(t,a)$; $\forall t \in Z$; $\forall a \in A$; $\forall x \in A^+$, $x \neq 0$.

   En efecto, por la consecuencia anterior,

$$\lambda_1(t+x, a-x) < \lambda_1(t, a-x+x) = \lambda_1(t,a).$$

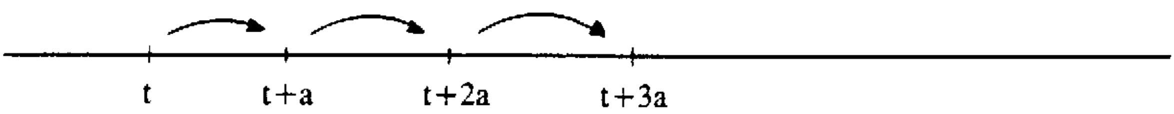
4 Sistemas financieros simplemente compuestos

Hasta ahora, dada una ley financiera

$$\mathcal{L} = (Z \times B, A, \delta),\ \ A = n\mathcal{Z}$$

y un capital (t, C), sólo podemos hallar su equivalente financiero efectuando desplazamientos de n o $\dot{n}$ unidades temporales a partir de t:

Figura 5



Plan Financiero (pesetas constantes de 1992)

Necesidades	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Inversiones	25.000.000	-	-	-	-	-	-	-
Energía	512.719	3.016.159	6.765.920	6.765.920	6.765.920	6.765.920	6.765.920	6.765.920
Alimentación	714.250	3.931.357	8.178.586	8.178.586	8.178.586	8.178.586	8.178.586	8.178.586
C. Alevines	7.150.000	7.150.000	7.150.000	7.150.000	7.150.000	7.150.000	7.150.000	7.150.000
Varios	1.005.236	1.691.702	2.651.341	2.651.341	2.651.341	2.651.341	2.651.341	2.651.341
C.Mano de Obra	3.013.699	4.000.000	4.000.000	4.000.000	4.000.000	4.000.000	4.000.000	4.000.000
O.G. Internos	1.389.575	1.190.686	1.350.305	1.350.305	1.350.305	1.350.305	1.350.305	1.350.305
Devoluciones								
Ptmo. a corto	-	-	3.000.000	5.000.000	7.000.000	-	-	-
Ptmo. a largo	-	-	3.400.000	3.400.000	3.400.000	7.400.000	11.400.000	-
Intereses	-	-	4.400.000	3.760.000	2.920.000	1.880.000	1.140.000	-
Total Neces.	38.785.479	20.979.904	40.896.152	42.256.152	43.416.152	39.376.152	42.636.15	30.096.152
Fuentes								
Ventas	-	-	46.826.440	46.826.440	46.826.440	46.826.440	46.826.440	46.826.440
Capital	17.000.000	-	-	-	-	-	-	-
Ptmo. a corto	15.000.000	-	-	-	-	-	-	-
Ptmo. a largo	29.000.000	-	-	-	-	-	-	-
Total Fuentes	61.000.000	-	46.826.440	46.826.440	46.826.440	46.826.440	46.826.44	46.826.440
Rec. Generados	22.214.521	-21.979.904	5.930.288	4.570.000	3.410.288	7.450.288	4.190.288	16.730.288
Rec. Acumulados	22.214.521	1.234.617	7.164.905	11.735.193	15.145.481	22.595.769	26.786.057	43.516.345

CUADRO 4

ÍNDICE

Cuenta de Explotación Provisional (pesetas constantes de 1992)

Ingresos	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Ventas	-	-	46.826.440	46.826.440	46.826.440	46.826.440	46.826.440	46.826.440
Gastos								
Energía	512.719	3.016.159	6.765.920	6.765.920	6.765.920	6.765.920	6.765.920	6.765.920
Alimentación	714.250	3.931.357	8.178.586	8.178.586	8.178.586	8.178.586	8.178.586	8.178.586
C. Alevines	7.150.000	7.150.000	7.150.000	7.150.000	7.150.000	7.150.000	7.150.000	7.150.000
Varios	1.005.236	1.691.702	2.651.341	2.651.341	2.651.341	2.651.341	2.651.341	2.651.341
C. Mano de Obra	3.013.699	4.000.000	4.000.000	4.000.000	4.000.000	4.000.000	4.000.000	4.000.000
O.G. Internos	1.389.575	1.190.686	1.350.305	1.350.305	1.350.305	1.350.305	1.350.305	1.350.305
Amortizaciones	2.500.000	2.500.000	1.500.000	1.500.000	1.500.000	1.500.000	1.500.000	1.500.000
G. Financieros	-	-	4.400.000	3.760.000	2.920.000	1.880.000	1.140.000	-
Total Gastos	16.285.479	23.479.904	36.356.152	36.356.152	35.516.152	34.476.152	33.736.152	32.596.152
Beneficios	-16.285.479	-23.479.904	9.830.288	10.470.288	11.310.288	12.350.288	13.090.28	14.230.288

CUADRO 5

$$= (\text{por ser } \mathcal{L}' \text{ una ley financiera}) =$$
$$= \lambda_1'(t+nz, n'z') \circ \lambda_1(t, nz) =$$
$$= \lambda_1''(t, nz+n'z').$$

Veamos si, además, $\mathcal{L}' \circ \mathcal{L}$ cumple las condiciones para ser una ley financiera:

1º) $\forall t \in Z;\ \forall a_1'', a_2'' \in A''$,

$$\lambda_1''(t+a_1'', a_2'') \circ \lambda_1''(t, a_1'') =$$
$$= (\text{si } a_1'' = nz_1 + n'z_1' \text{ y } a_2'' = nz_2 + n'z_2') =$$
$$= \lambda_1'(t+a_1''+nz_2, n'z_2') \circ \underbrace{\lambda_1(t+a_1'', nz_2)}_{} \circ$$
$$\circ \underbrace{\lambda_1'(t+nz_1, n'z_1')}_{} \circ \lambda_1(t, nz_1) =$$
$$= (\text{por la condición 2. anterior}) =$$
$$= \lambda_1'(t+a_1''+nz_2, n'z_2') \circ \lambda_1'(t+nz_1+nz_2, n'z_1') \circ$$
$$\circ \lambda_1(t+nz_1, nz_2) \circ \lambda_1(t, nz_1) =$$
$$= \lambda_1'(t+nz_1+nz_2, n'z_1'+n'z_2') \circ \lambda_1(t, nz_1+nz_2) =$$
$$= \lambda_1''(t, (nz_1+nz_2)+(n'z_1'+n'z_2')) = \lambda_1''(t, a_1''+a_2'').$$

2º) $\forall t \in Z;\ \forall x'' \in A''^{+};\ x \neq 0$,

$$\lambda_1''(t, x'') = (\text{si } x'' = nv + n'v') =$$
$$= \lambda_1'(t+nv, n'v') \circ \lambda_1(t, nv) >$$
$$> (\text{por la segunda consecuencia de ley financiera para } \mathcal{L} \text{ y } \mathcal{L}') >$$
$$> Id_{\mathcal{R}} \circ Id_{\mathcal{R}} = Id_{\mathcal{R}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\text{por la segunda consecuencia de ley financiera para } \mathcal{L}' \circ \mathcal{L}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall t \in Z;\ \forall a'' \in A'';\ \forall x'' \in A''^{+};\ x \neq 0, \lambda_1''(t, a'') < \lambda_1''(t, a''+x'').$$

Ahora bien, en el caso de que no fueran nv y $n'v'$ mayores o iguales que 0, siempre podría conseguirse que:

$$n'v' > 0 \text{ y } nv < 0:$$

En efecto, dados n y $n' \in \mathbb{Z}$, por la igualdad de Bézout, para números enteros:

$$\exists \alpha,\ \beta \in \mathbb{Z} /\ \alpha n + \beta n' = n''.$$

Además, se puede demostrar que α y β pueden sustituirse por $\alpha + k.n'$ y $\beta - k.n$, respectivamente, siendo k un número entero cualquiera.

Si $k = n$, entonces

$$\alpha + k.n' = \alpha + n.n' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{(como se puede suponer que } \alpha > 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha + n.n' > n.n' = \widehat{m.c.\dot{m}.}(n, n').$$

Además,

$$\beta - k.n = \beta - n.n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{(suponiendo que } n' > n \text{ y como se puede suponer que } \beta < 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n.n - \beta < n.n + n = n(n+1) < n.n' = \widehat{m.c.\dot{m}.}(n, n').$$

En consecuencia, siempre podemos encontrar un múltiplo de

$$m.c.m.(n, n') = m,$$

tal que:

$$n'.v' > \dot{m} \text{ y } \ -n.v < \dot{m}.$$

De esta forma,

$$\lambda_1'(t + nv, n'v') \circ \lambda_1(t, nv) =$$

$$\lambda_1'(t + nv, n'v') \circ \lambda_1'(t + nv + \dot{m}, -\dot{m}) \circ \lambda_1(t + nv, \dot{m}) \circ \lambda_1(t, nv) =$$

$$= \lambda_1'(tz + nv + \dot{m}, \underbrace{n'v' - \dot{m}}) \circ \lambda_1(t, \underbrace{nv + \dot{m}}).$$

Por lo expuesto anteriormente, los dos sumandos "bajo llaves" son positivos.

3º) $\forall t \in Z$; $\forall a'' \in A''$; $\forall x'' \in A''^{+}$; $x \neq 0$,

$$\lambda_1''(t, a'' + x'') - \lambda_1''(t, a'') =$$

$$= (\text{si } a'' = nz + n'z';\ x'' = nv + n'v') =$$

$$= \lambda_1'(t + nz + nv, n'z' + n'v') \circ \lambda_1(t, nz + nv) -$$

$$- \lambda_1'(t + nz, n'z') \circ \lambda_1(t, nz) =$$

Restando y sumando $\lambda_1'(t + nz + nv, n'z') \circ \lambda_1(t, nz + nv)$, nos quedaría:

$$[\lambda_1'(t + nz + nv, n'z' + n'v') - \lambda_1'(t + nz + nv, n'z')] \circ \lambda_1(t, nz + nv) +$$

$$+ [\lambda_1(t + n'z', nz + nv) - \lambda_1(t + n'z', nz)] \circ \lambda_1'(t, n'z').$$

Esta última expresión pertenece a $FC_{\mathcal{R}}$, ya que:

a) $n'v' > 0$. Entonces, por la tercera condición de ley financiera para $\mathcal{L}$:

$$\lambda_1'(t + nz + nv, n'z' + n'v') - \lambda_1'(t + nz + nv, n'z') \in FC_{\mathcal{R}}.$$

b) $\lambda_1(t, nz + nv) \in FC_{\mathcal{R}}$, por la definición de $\mathcal{L}$.

c) $nv > 0$. Entonces, por la tercera condición de ley financiera para $\mathcal{L}$:

$$\lambda_1(t + n'z', nz + nv) - \lambda_1(t + n'z', nz) \in FC_{\mathcal{R}}.$$

d) $\lambda_1'(t, n'z') \in FC_{\mathcal{R}}$, por la definición de $\mathcal{L}'$.

En el caso de que no fueran nv y $n'v'$ mayores o iguales que 0, siempre podría encontrarse un múltiplo de

$$m.c.m.(n, n') = m,$$

tal que:

$$n'.v' > \dot{m} \text{ y } -n.v < \dot{m}.$$

De esta forma,

$$\lambda_1'(t + nz + nv, n'z' + n'v') \circ \lambda_1(t, nz + nv) - \lambda_1'(t + nz, n'z') \circ \lambda_1(t, nz) =$$

$$\lambda_1'(t + nz + nv, n'z' + n'v') \circ \lambda_1'(t + nz + nv + \dot{m}, -\dot{m}) \circ \lambda_1(t + nz + nv, \dot{m}) \circ$$

$$\circ \lambda_1(t, nz + nv) - \lambda_1'(t + nz, n'z') \circ \lambda_1(t, nz) =$$

$$= \lambda_1'(t + nz + nv + \dot{m}, n'z' + \underbrace{n'v' - \dot{m}}) \circ \lambda_1(t, nz + \underbrace{nv + \dot{m}}) -$$

$$- \lambda_1'(t + nz, n'z') \circ \lambda_1(t, nz).$$

ÍNDICE

Por lo expuesto anteriormente, los dos sumandos "bajo llaves" son positivos.

4º) $\forall t \in Z;\ \forall a'' \in A'';\ \forall x, y \in A''^{+}$,

$$\lambda_1''(t, a'' + x'' + y'') - \lambda_1''(t, a'' + y'') =$$

$$= (\text{si } a'' = nz + n'z';\ x'' = nv + n'v';\ y'' = nu + n'u') =$$

$$= \lambda_1'(t + nz + nv + nu, n'z' + n'v' + n'u') \circ \lambda_1(t, nz + nv + nu) -$$

$$-\lambda_1'(t + nz + nu, n'z' + n'u') \circ \lambda_1(t, nz + nu) =$$

$$= (\text{sumamos y restamos la misma expresión}) =$$

$$= \lambda_1'(t + nz + nv + nu, n'z' + n'v' + n'u') \circ \lambda_1(t, nz + nv + nu) -$$

$$-\lambda_1'(t + nz + nv + nu, n'z' + n'u') \circ \lambda_1(t, nz + nv + nu) +$$

$$+\lambda_1'(t + nz + nv + nu, n'z' + n'u') \circ \lambda_1(t, nz + nv + nu) -$$

$$-\lambda_1'(t + nz + nu, n'z' + n'u') \circ \lambda_1(t, nz + nu) =$$

$$= \lambda_1'(t + nz + nv + nu, n'z' + n'v' + n'u') \circ \lambda_1(t, nz + nv + nu) -$$

$$-\lambda_1'(t + nz + nv + nu, n'z' + n'u') \circ \lambda_1(t, nz + nv + nu) +$$

$$+\lambda_1(t + n'z' + n'u', nz + nv + nu) \circ \lambda_1'(t, n'z' + n'u') -$$

$$-\lambda_1(t + n'z' + n'u', nz + nu) \circ \lambda_1'(t, n'z' + n'u') =$$

$$= [\lambda_1'(t + nz + nv + nu, n'z' + n'v' + n'u') - \lambda_1'(t + nz + nv + nu, n'z' + n'u')] \circ$$

$$\circ \lambda_1(t, nz + nv + nu) +$$

$$+[\lambda_1(t + n'z' + n'u', nz + nv + nu) - \lambda_1(t + n'z' + n'u', nz + nu)] \circ$$

$$\circ \lambda_1'(t, n'z' + n'u') \geq$$

$$\geq (\text{por la cuarta condición de ley financiera para } \mathcal{L} \text{ y } \mathcal{L}') \geq$$

$$\geq [\lambda_1'(t + nz + nv + nu, n'z' + n'v') - \lambda_1'(t + nz + nv + nu, n'z')] \circ$$

$$\circ \lambda_1(t, nz + nv + nu) +$$

$$+[\lambda_1(t + n'z' + n'u', nz + nv) - \lambda_1(t + n'z' + n'u', nz)] \circ$$

$$\circ \lambda_1'(t, n'z' + n'u') \geq$$

$$\geq (\text{como siempre se puede tomar } u,\ u' \geq 0) \geq$$

$$\geq [\lambda_1'(t+nz+nv+nu, n'z'+n'v') - \lambda_1'(t+nz+nv+nu, n'z')]\circ$$

$$\circ\lambda_1(t, nz+nv)+$$

$$+[\lambda_1(t+n'z'+n'u', nz+nv) - \lambda_1(t+n'z'+n'u', nz)]\circ$$

$$\circ\lambda_1'(t, n'z') =$$

$$= \lambda_1'(t+nz+nv+nu, n'z'+n'v') \circ \lambda_1(t, nz+nv)-$$

$$-\lambda_1'(t+nz+nv+nu, n'z') \circ \lambda_1(t, nz+nv)+$$

$$+\lambda_1(t+n'z'+n'u', nz+nv) \circ \lambda_1'(t, n'z')-$$

$$-\lambda_1(t+n'z'+n'u', nz) \circ \lambda_1'(t, n'z') =$$

$$= \lambda_1(t+n'z'+n'v', nz+nv) \circ \lambda_1'(t, n'z'+n'v')-$$

$$-\lambda_1(t+n'z', nz+nv) \circ \lambda_1'(t, n'z')+$$

$$+\lambda_1'(t+nz+nv, n'z') \circ \lambda_1(t, nz+nv)-$$

$$-\lambda_1'(t+nz, n'z') \circ \lambda_1(t, nz) =$$

$$= \lambda_1'(t+nz+nv, n'z'+n'v') \circ \lambda_1(t, nz+nv)-$$

$$-\lambda_1(t+n'z', nz+nv) \circ \lambda_1'(t, n'z')+$$

$$+\lambda_1(t+n'z', nz+nv) \circ \lambda_1'(t, n'z')-$$

$$-\lambda_1'(t+nz, n'z') \circ \lambda_1(t, nz) =$$

$$= \lambda_1''(t, a''+x'') - \lambda_1''(t, a'').$$

Puede ocurrir que todas las leyes pertenecientes a un sistema financiero cumplan las condiciones del teorema anterior cuando se toman de dos en dos. En este caso, estamos ante un caso notable de sistema financiero.

4.3 Definición: Sistema simplemente compuesto

Se llama *sistema financiero simplemente compuesto* a todo sistema financiero

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{L}(a)/a \in \mathcal{Z}\}$$

en el que todas las leyes financieras que lo componen cumplen las condiciones del teorema anterior cuando se toman de dos en dos, es decir, cuando se verifica que:

$$\forall \mathcal{L}(a),\ \mathcal{L}(a') \in \mathcal{F},$$

siendo

$$\mathcal{L}(a) = (Z \times B, a\mathcal{Z}, \delta)$$

y

$$\mathcal{L}(a') = (Z \times B, a'\mathcal{Z}, \delta):$$

1. $\forall t \in Z$,

$$\lambda_1^a(t,m) = \lambda_1^{a'}(t,m),$$

siendo $m = m.c.m.(a,a')$.

2. $\forall t \in Z$,

$$\lambda_1^{a'}(t+a,a') \circ \lambda_1^a(t,a) = \lambda_1^a(t+a',a) \circ \lambda_1^{a'}(t,a').$$

Ahora bien, por el teorema anterior, sabemos que

$$\forall \mathcal{L}(a),\ \mathcal{L}(a') \in \mathcal{F},$$

podemos construir una nueva ley financiera

$$\mathcal{L}(a') \circ \mathcal{L}(a).$$

Nos hacemos la siguiente pregunta: ¿ pertenecerá al sistema financiero ?. La respuesta es afirmativa como se demuestra en el siguiente

4.4 Teorema

$(\mathcal{F}, \circ)$ es un semigrupo abeliano idempotente.

Demostración.- En efecto,

1º) $\circ$ *es una ley de composición interna:*
$\forall a,\ a' \in A$,

$$\left.\begin{array}{rcl} m.c.m.(a, m.c.d.(a,a')) & = & a \\ m.c.m.(a', m.c.d.(a,a')) & = & a' \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \lambda_1^a(t,a) = \lambda_1^{m.c.d.(a,a')}(t,a) \\ \lambda_1^{a'}(t,a') = \lambda_1^{m.c.d.(a,a')}(t,a') \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1''(t, m.c.d.(a,a')) = \lambda_1''(t, az + a'z') =$$

$$= \lambda_1^{a'}(t + az, a'z') \circ \lambda_1^a(t, az) =$$

$$= \lambda_1^{m.c.d.(a,a')}(t + az, a'z') \circ \lambda_1^{m.c.d.(a,a')}(t, az) =$$

$$= \lambda_1^{m.c.d.(a,a')}(t, az + a'z') =$$

$$= \lambda_1^{m.c.d.(a,a')}(t, m.c.d.(a,a')) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(a') \circ \mathcal{L}(a) = \mathcal{L}(m.c.d.(a,a')).$$

Las propiedades asociativa, conmutativa e idempotente son evidentes.

Consideremos entonces la relación R definida por:

$$\mathcal{L}(a) R\, \mathcal{L}(a') \Leftrightarrow \mathcal{L}(a') \circ \mathcal{L}(a) = \mathcal{L}(a).$$

Al igual que ocurre con cualquier relación binaria inducida por un semigrupo abeliano idempotente, se verifica que:

4.5 Teorema

R es una relación de orden.

Demostración.- Evidente.

4.6 Teorema

$(\mathcal{F}, \circ)$ es un inf-semirretículo.

Demostración.- Evidente.

ÍNDICE

4.7 Teorema

$(\mathcal{F},*)$ es un semigrupo abeliano e idempotente y $*$ y $\circ$ están ligadas por la ley de absorción, siendo $\mathcal{L}(a) * \mathcal{L}(a') = \mathcal{L}(m.c.m.(a,a'))$.

Demostración.- Evidente.

4.8 Teorema

$(\mathcal{F}, R)$ es un retículo distributivo.

Demostración.- Evidente.

La situación anterior podemos representarla de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}(a) * \mathcal{L}(a') = \mathcal{L}(m.c.m.(a,a'))\mathcal{L}(a)\mathcal{L}(a')\mathcal{L}(a) \circ \mathcal{L}(a') = \mathcal{L}(m.c.d.(a,a'))$$

4.9 Ejemplo

Demostrar que la familia de leyes financieras

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{L}(a) / \ a \in \mathcal{Z}\},$$

siendo

$$A = a\mathcal{Z}; \ B =]1, +\infty[; \ \lambda_1^a(t,a) = (Id_{\mathcal{R}})^{k^a}, \ k > 1$$

es un sistema financiero simplemente compuesto.

En efecto,

1º) $\forall t \in Z$; $\forall a, a' \in \mathcal{Z}$, si $m = m.c.m.(a,a')$,

$$\lambda_1^a(t,m) = \lambda_1^a(t+m-a,a) \circ \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\frac{m}{a}\ veces} \circ \lambda_1^a(t+a,a) \circ \lambda_1^a(t,a) =$$

$$= (Id_{\mathcal{R}})^{k^a} \circ \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\frac{m}{a}\ veces} \circ (Id_{\mathcal{R}})^{k^a} =$$

$$= (Id_{\mathcal{R}})^{k^m} = \lambda_1^m(t,m).$$

Análogamente, se demuestra que:

$$\lambda_1^{a'}(t,m) = (Id_{\mathcal{R}})^{k^m} = \lambda_1^m(t,m).$$

2º) $\forall t \in Z;\ \forall a, a' \in \mathcal{Z}$,

$$\lambda_1^{a'}(t+a, a') \circ \lambda_1^{a}(t, a) = (Id_{\mathcal{R}})^{k^{a'}} \circ (Id_{\mathcal{R}})^{k^{a}} =$$

$$= (Id_{\mathcal{R}})^{k^{a+a'}} = \lambda_1^{a+a'}(t, a+a').$$

Análogamente, se demuestra que:

$$\lambda_1^{a}(t+a', a) \circ \lambda_1^{a'}(t, a') =$$

$$= (Id_{\mathcal{R}})^{k^{a+a'}} = \lambda_1^{a+a'}(t, a+a').$$

Por tanto, $\mathcal{F}$ es un sistema simplemente compuesto.

4.10 Caso particular

Cuando el sistema financiero $\mathcal{F}$ esté formado por leyes financieras que son homogéneas de grado 1 con respecto a la cuantía, tendremos, como caso particular, un sistema financiero simplemente multiplicativo, es decir, que los sistemas financieros simplemente compuestos incluyen, como caso particular, los sistemas financieros simplemente multiplicativos. En efecto, $\forall t \in Z;\ \forall a, a' \in \mathcal{Z}$,

$$\lambda_1^{a'}(t+a, a')(1).\lambda_1^{a}(t, a)(1).Id_{\mathcal{R}} =$$

$$= \lambda_1^{m.c.d.(a,a')}(t, a+a')(1).Id_{\mathcal{R}} = \lambda_1^{a+a'}(t, a+a')(1).Id_{\mathcal{R}}.$$

5 Sistemas simplemente sumativos

A continuación, vamos a construir un segundo modelo de sistema financiero en el que la suma de los intereses generados consecutivamente por dos leyes financieras sobre una misma cuantía, coincide con el interés generado, sobre dicha cuantía, por la ley cuyo input base es el m.c.d. de los inputs básicos anteriores.

Sean

$$\mathcal{L} = (Z \times B, A, \delta),\ \ A = n\mathcal{Z}$$

y

$$\mathcal{L}' = (Z \times B, A', \delta'),\ \ A' = n'\mathcal{Z}$$

dos leyes financieras tales que

1º) $\forall t \in Z$,

$$I(t,n) + I(t+n,n) + \ldots.. + I(t+m-n,n) =$$
$$= I'(t,n') + I'(t+n',n') + \ldots.. + I'(t+m-n',n'),$$

siendo $m = m.c.m.(n,n')$. O lo que es lo mismo, $\forall t \in Z$,

$$\sum_{h=0}^{\frac{m}{n}-1} I(t+hn,n) = \sum_{h=0}^{\frac{m}{n'}-1} I'(t+hn',n').$$

2º) $\forall t \in Z$,

$$I(t,n) + I'(t+n,n') = I'(t,n') + I(t+n',n).$$

Definimos:

$$\mathcal{L}'T\mathcal{L} = (Z \times B, A'', FC_{\mathcal{R}}, \delta'', \lambda'')$$

de la siguiente manera:

$A'' = A + A' = m.c.d.(n,n')\mathcal{Z} = n''\mathcal{Z}$,

$\delta''_1(t,a'') = t + a''$,

$\lambda''_1(t,n'') = Id_{\mathcal{R}} + I(t,n) + I(t+n,n) + \ldots.. + I(t+n(z-1),n) -$
$-I'(t+nz-n',n') - I'(t+nz-2n',n') + \ldots.. + I'(t+nz-n'z',n'),$

suponiendo que $n'' = nz - n'z'$.

O lo que es lo mismo:

$$\lambda''_1(t,n'') = Id_{\mathcal{R}} + \sum_{h=0}^{z-1} I(t+hn,n) - \sum_{h=1}^{z'} I'(t+nz-hn',n'),$$

$\lambda''_1(t,a'') = (\text{si } a'' = n''z'') =$
$= \lambda''_1(t+n''(z''-1),n'') \circ \ldots.. \circ \lambda''_1(t+n'',n'') \circ \lambda''_1(t,n''),$

$\delta''_2(C,f) = f(C).$

5.1 Teorema

$\mathcal{L}'T\mathcal{L}$ es una ley financiera.

Demostración.- Es análoga a la del Teorema 4.2.

5.2 Definición: Sistema simplemente sumativo

Se llama *sistema financiero simplemente sumativo* a un sistema financiero

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{L}(a)/a \in \mathcal{Z}\}$$

en el que todas las leyes financieras que lo componen cumplen las condiciones del teorema anterior cuando se toman de dos en dos, es decir, cuando se verifica que:

$$\forall \mathcal{L}(a), \mathcal{L}(a') \in \mathcal{F},$$

siendo

$$\mathcal{L}(a) = (Z \times B, a\mathcal{Z}, \delta),$$

y

$$\mathcal{L}(a') = (Z \times B, a'\mathcal{Z}, \delta):$$

1. $\forall t \in Z$,

$$\sum_{h=0}^{\frac{m}{a}-1} I^a(t+ha, a) = \sum_{h=0}^{\frac{m}{a'}-1} I^{a'}(t+ha', a'),$$

   siendo

$$m = m.c.m.(a, a').$$

2. $\forall t \in Z$,

$$I^a(t,a) + I^{a'}(t+a, a') = I^{a'}(t, a') + I^a(t+a', a).$$

Por el teorema anterior,

$$\forall \mathcal{L}(a), \mathcal{L}(a') \in \mathcal{F},$$

podemos construir una nueva ley financiera

$$\mathcal{L}(a') T \mathcal{L}(a).$$

Al igual que en el caso de los sistemas simplemente compuestos, se puede obtener el siguiente resultado:

5.3 Teorema

$(\mathcal{F}, R)$ es un retículo distributivo.

ÍNDICE

5.4 Ejemplo

Demostrar que la familia de leyes financieras

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{L}(a)/\ a \in \mathcal{Z}\},$$

siendo

$$A = a\mathcal{Z};\ \ B =]0, +\infty[;\ \ \lambda_1^a(t, a) = Id_{\mathcal{R}}.(1 + a.f),$$

siendo $f(> 0)$ una función monótona creciente de C, es un sistema financiero simplemente sumativo.

En efecto,

1º) $\forall t \in Z;\ \forall a, a' \in \mathcal{Z},$ si $m = m.c.m.(a, a')$,

$$\sum_{h=0}^{\frac{m}{a}-1} I^a(t + ha, a) = \sum_{h=0}^{\frac{m}{a}-1} a.f.Id_{\mathcal{R}} =$$

$$= f.Id_{\mathcal{R}}.\sum_{h=0}^{\frac{m}{a}-1} a = f.Id_{\mathcal{R}}.m = I^m(t, m).$$

Análogamente, se demuestra que:

$$\sum_{h=0}^{\frac{m}{a}'-1} I^{a'}(t + ha', a') = I^m(t, m).$$

2º) $\forall t \in Z;\ \forall a, a' \in \mathcal{Z},$

$$I^a(t, a) + I^{a'}(t + a, a') = a.f.Id_{\mathcal{R}} + a'.f.Id_{\mathcal{R}} =$$

$$= (a + a').f.Id_{\mathcal{R}} = I^{a+a'}(t, a + a').$$

Análogamente, se demuestra que:

$$I^{a'}(t, a') + I(t + a', a) = I^{a+a'}(t, a + a').$$

Por tanto, $\mathcal{F}$ es un sistema simplemente sumativo.

5.5 Caso particular

Cuando el sistema financiero $\mathcal{F}$ esté formado por leyes financieras que son homogéneas de grado 1 con respecto a la cuantía, tendremos, como caso particular, un sistema financiero simplemente sumativo clásico, es decir, que los sistemas financieros simplemente sumativos incluyen, como caso particular, los sistemas financieros simplemente sumativos de la teoría clásica.

En efecto, $\forall t \in Z$; $\forall a, a' \in \mathcal{Z}$,

$$I^{a}(t,a)(1).Id_{\mathcal{R}} + I^{a'}(t+a,a')(1).Id_{\mathcal{R}} =$$

$$= I^{m.c.d.(a,a')}(t,a+a')(1).Id_{\mathcal{R}} = I^{a+a'}(t,a+a')(1).Id_{\mathcal{R}}.$$

Bibliografía

Ames, E. (1983): *Automaton and Group Structures in Certain Economic Adjustment Mechanisms*
Mathematical Social Sciences 6, North-Holland, pp. 247-260.

Arbib, M. A. (1964): *Brains, machines and mathematics*
New York, McGraw-Hill.

Arbib, M. A. (1969): *Theories of abstract automata*
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J..

Arbib, M. A. (1968): *Algebraic Theory of Machines, Languages and Semigroups*
New York-London, Academic Press.

Bhaumik R. N. y Das, A. (1984): *The role of preference relations in mathematical economics*
Math. Student 52, pp. 1-24.

Cruz, S. (1994): *Nuevo enfoque de las leyes financieras a través de la Teoría Algebráica de Autómatas*
Madrid, Tesis Doctoral de la Universidad Nacional a Distancia.

De Pablo, A. (1993): *Matemática de las Operaciones Financieras*
Madrid, U.N.E.D..

Dubreil, P. (1975): *Teoría de grupos*

ÍNDICE

Barcelona, Editorial Reverté, S.A..

Dubreil P. y Dubreil-Jacotin, M. L. (1975): *Lecciones de Algebra Moderna* Barcelona, Editorial Reverté, S.A..

Eilenberg, S. (1974): *Automata, languages and machines, Vol. B* New York, Academic Press.

Gil, L. (1987): *Matemática de las Operaciones Financieras* Madrid, Editorial AC.

Holcombe, W. M. L. (1987): *Algebraic Automata Theory* Cambridge, Cambridge University Press.

Lidl R. y Pilz, G. (1984): *Applied Abstract Algebra* New York, Springer-Verlag.

Rodríguez, A. (1984): *Matemática de la Financiación* Universidad de Barcelona.