,Estudios de Economía Aplicada
Nº 8, 1997. Págs. 163-189

# Consumo privado, inversión pública e impuestos en una solución no cooperativa

SOTO TORRES M. D.
MACARRO HEREDIA M. J.
*Universidad de Valladolid*

## RESUMEN

Este trabajo analiza el equilibrio no cooperativo de Nah sobre un juego diferencial entre el gobierno y el sector privado. La tecnología tiene una influencia directa sobre el comportamiento de las trayectorias de capital público y privado en el equlibrio, por ello, se analiza una tecnología no lineal y una lineal. Las características que presenta el equilibrio con la tecnología lineal permiten caracterizarle como un subjuego perfecto, lo que permite la construcción de estrategias de amenaza que mejoran los objetivos de los sectores.

*Palabras claves:* Crecimiento Neoclásico, Solución de Equilibrio de Nash, Estrategias de Amenaza.

## ABSTRACT

This paper examines the Nash equilibria solution for a differential game between the government and the private sector. The effect that technology has on the strategies of both players is studied to consider a non linear and linear production function. The equilibria when the technology is linear has the propety to be a subgame perfect. It allows us to build trigger strategies.

*Key Words:* Neoclassical Growth, Nash Equilibria Solution, Trigger Strategies.

Código Unesco: 5304/01, 1207/06.

Artículo recibido en abril de 1997. Revisado en junio de 1997.

## 1. Introducción

Los modelos propuestos por la teoría neoclásica, para explicar la importancia de ciertos elementos en el crecimiento, prestan especial atención a la acumulación de bienes de capital, el crecimiento de la población y el progreso técnico, distinguiendo entre el corto plazo, cuando esos elementos son fijos y el largo plazo si ninguno de ellos está dado. Esta teoría, aún considerando el supuesto de dos sectores (Takayama (1985, pp. 627-646)), supone que en el proceso de inversión para la acumulación de capital existe un único decisor, aunque sí contempla la evolución de los stock de capital de los sectores separadamente.

Existen en la literatura distintos modelos en los que aparecen aspectos que pueden enmarcarse dentro de la teoría neoclásica del crecimiento que son tratados utilizando la teoría de juegos, por tanto, las decisiones son tomadas por dos o más agentes. En estos modelos está presente una economía donde el output se obtiene con la intervención de trabajo, capital y con una tecnología dada, esta última representada por una función que tiene la propiedad de ser homogénea y de grado uno, lo que permite expresar las posibilidades de producción en términos "per capita". Entre los trabajos en los que están presentes estas características pueden citarse, el pionero de Lancaster (1973) o el de Phojola (1983) que utilizan una tecnología lineal y horizonte finito; el artículo de Hoel (1978), también en horizonte finito, que introduce las condiciones de Inada en las posibilidades de producción, condiciones que también considera Shimomura (1991) en un modelo con horizonte infinito. En todos estos trabajos hay dos agentes, pero sólo uno de ellos tiene la posibilidad de modificar el capital dedicado a la producción.

Si se considera una economía con dos sectores, por ejemplo, sector público y sector privado, no sustitutivos, agentes representativos de ambos sectores tendrían capacidad de decisión sobre formación de capital propio. De este modo, aspectos tratados por modelos bisectoriales de la teoría neoclásica del crecimiento podrían ser analizados por teoría de juegos, si las decisiones de un sector afectan al otro y recíprocamente. La influencia del sector público sobre el privado es abordado por Aschauer en dos trabajos, donde estudia los efectos que el gasto público tiene sobre la inversión privada (1989, a) y cómo determinados movimientos de la actividad privada de los Estados Unidos pueden ser explicados por la acumulación de capital público y gasto público (1989, b). También, Jones y Manuelli (1990) investigan cómo las políticas gubernamentales pueden condicionar el comportamiento a largo plazo de una economía, induciendo heterogeneidad entre países con la posibilidad de que crecimientos de consumo y producción sean permanentemente diferentes. Pero la incidencia tiene que ser recíproca, pues decisiones del sector privado tienen que inducir respuestas en el sector público si las actividades de éste no se concretan en la producción de bienes.

El modelo que presentamos recoge algunas de las características del planteado por Buffie (1995), en donde el sector privado determina sus caminos óptimos de consumo, activos monetarios y stock de capital, suponiendo conocida la actuación del sector público. Nosotros tomando su función de producción, dependiente del capital público y privado, incorporamos al sector público como agente con capacidad de decisión para alcanzar un objetivo. De esta forma sustituimos la idea de Buffie y consideramos que el sector privado tiene influencia sobre las decisiones del sector público. El análisis propuesto se centra sobre un horizonte de planificación finito, retomando la idea de Lancaster y la posterior de Seierstad (1993). El horizonte temporal finito se justifica al suponer, en el modelo, que el objetivo del sector público es maximizar su consumo durante él, objetivo que puede ser prioritario para un gobierno o para una legislatura y no para otros gobiernos u otras legislaturas.

El trabajo está organizado en cinco secciones. En la segunda, se realiza el planteamiento del modelo incluyendo los objetivos de los dos agentes y sus posibilidades de decisión. En la tercera sección, se analiza cuál es el resultado sobre el comportamiento de los capitales si los sectores siguen una situación no cooperativa propuesta por un equilibrio de Nash. La sección tercera contiene también dos subsecciones que estudian casos particulares del equilibrio, considerando distintas tecnologías en la economía. Así, en la primera subsección se analiza el equilibrio con una tecnología no lineal, tipo Cobb-Douglas, que lleva implícito un comportamiento complementario en el proceso productivo de los dos sectores. La selección de la tecnología Cobb-Douglas se debe a razones de presentación de resultados, que serían menos manejables si por ejemplo, se considera una tecnología tipo C.E.S. como la utilizada por Buffie. En la segunda subsección la tecnología es lineal, con lo que las productividades marginales de los capitales son constantes; las características que presenta el equilibrio con la tecnología lineal permiten analizar si los sectores podrían llegar a un cierto acuerdo, con la intención de aumentar sus objetivos en el periodo de planificación. El estudio de estas estrategias de amenaza se realiza en la sección cuarta. Por último, el trabajo se concluye destacando los resultados más significativos del análisis realizado.

## 2.- Planteamiento del modelo

Se considera una economía que produce un único bien privado y en la que intervienen dos agentes representativos del sector público y privado. El agente privado dispone en un momento $t$ de $K(t)$ unidades de capital privado y el agente público, que adquiere el bien al sector privado, dispone en cada momento $t$ de $Z(t)$ unidades de capital público, materializado en infraestructura social, como carreteras, aeropuertos, puertos, bienes del estado, etc. La producción, suponiendo constante la aportación de trabajo, se obtiene mediante capital público y privado, siguiendo la expresión $Y(t)=q(K(t),Z(t))$, donde la función de producción, de clase $C^2$, satisface las condiciones:

$$q'_K(K(t),Z(t))>0,\ q'_Z(K(t),Z(t))>0,\ q''_{KK}(K(t),Z(t))<0,$$
$$q''_{ZZ}(K(t),Z(t))<0,$$

además, capital público y capital privado se suponen indispensables y complementarios o independientes $(q''_{KZ}(K,Z)\geq 0)$, pero no sustitutivos.

Sobre un horizonte finito de tiempo $T$ durante el cual capital público y privado interactuan para obtener la producción, ambos sectores desean encontrar sus caminos óptimos de consumo desde su participación en la producción. En cada momento, el sector privado dispone de $[\,q(K(t),Z(t))-\delta(t)K(t)\,](1-\nu(t))$, donde $\delta(t)$ es la tasa de depreciación del capital privado y $\nu(t)$ es la tasa impositiva en cada momento. La participación privada puede expresarse como $f(K(t),Z(t))-x(t)$, donde la función

$f(K(t),Z(t))=q(K(t),Z(t))-\delta(t)\ K(t)$ tiene las mismas características que la función de producción $q$, si se admite $q'_K(K(t),Z(t))>\delta(t)$, y $x(t)$ corresponde a los impuestos en el momento $t$, variable controlada por el sector público. Sin embargo, los impuestos no pueden eliminar la participación privada ni ser nulos, pues ellos corresponden a la participación pública en el producto, luego se tiene que verificar $0<x(t)<f(K(t),Z(t))$. Suponiendo proporcionalidad entre producción e impuestos, la última condición puede expresarse como que los impuestos estarían siempre comprendidos entre dos proporciones de la producción, siguiendo la relación $\beta_1(t)f(K(t),Z(t))\leq x(t)\leq\beta_2(t)f(K(t),Z(t))$, donde las tasas de impuestos $\beta_1(t)$ y $\beta_2(t)$ podrían satisfacer una relación:

$0<\beta_1(t)<1/2;\ \beta_1(t)<\beta_2(t)<1$ y serían valores determinados por el sector público y conocidos por el sector privado. Teniendo en cuenta la proporcionalidad entre impuestos y producto, la participación del sector privado puede expresarse como $(1-\beta(t))f(K(t),Z(t))$, con $\beta_1(t)\leq\beta(t)\leq\beta_2(t)$, y puede disponer de ella bien para consumo o para inversión. Designando por $m(t),\ 0\leq m(t)\leq 1$, el porcentaje que en cada momento el sector privado dedica a consumo, tenemos que el objetivo privado durante el horizonte es:

$$\max_m \quad J_{PR}(m)=\int_0^T m(t)\,(1-\beta(t))f(K(t),Z(t))\,dt,$$

y si la parte no consumida, se invierte, la variación en el tiempo del capital privado seguirá la expresión $\dot{K}(t)=(1-m(t))(1-\beta(t))f(K(t),Z(t))$. Supondremos además que en el momento inicial el agente privado dispone de $K_0 = K(0) > 0$ unidades de capital privado.

La participación del sector público en el producto corresponde en cada momento a los impuestos, que dedicará a gasto publico o inversión pública. Denotando por $s(t) \in [0,1]$ la proporción que el sector público dedica instantáneamente a consumo, el problema de maximizar el gasto público durante el horizonte $T$ puede expresarse:

$$\max_{\beta, s} \qquad J_{PU}(\beta, s) = \int_0^T s(t)\,\beta(t)\,f\,(K(t), Z(t))\,dt\,.$$

El capital público variará durante el horizonte temporal siguiendo la ecuación $\dot{Z}(t) = (1 - s(t))\beta(t) f\,(K(t), Z(t)) - \mu\,(t)Z(t)$, donde $\mu(t)$ es la tasa de depreciación del capital público. También se supone que en el momento inicial el gobierno dispone de $Z_0 = Z(0) > 0$ unidades de capital público.

El problema de determinar los cursos temporales óptimos de consumo e inversión para ambos sectores, puede ser analizado como un juego diferencial bipersonal, donde cada sector es un jugador, de suma no nula, pues lo que un sector gana el otro no tiene que perderlo, y horizonte finito $T$. La solución dependerá de las posiciones cooperativas o no de los jugadores.

De ahora en adelante, supondremos que $\beta_1$ y $\beta_2$ son constantes durante el horizonte temporal y que los tantos de depreciación de los capitales son nulos como en la teoría del crecimiento a corto plazo. Para el resto de las funciones mantendremos su dependencia respecto al tiempo, aunque no se haga explícito.

### 3.- Equilibrio de Nash no cooperativo

Planteado un juego con las características del que nos ocupamos, se pueden considerar dos tipos de equilibrios de Nash no cooperativos: en ciclo abierto y cerrado. En el primer caso los controles de los jugadores son función del tiempo, mientras que en ciclo cerrado, los controles son función, además, de las variables de estado. En el modelo planteado ambos equilibrios coinciden, ya que no hay posibilidad de que los controles de los jugadores sean función del capital público y/o privado.

Para obtener el equilibrio (Basar y Olsder, pp. 317) necesitamos resolver dos problemas parámetricos de control óptimo, con dos variables de estado. Aplicando el principio del máximo, donde las condiciones necesarias, supuesta la concavidad de la función de producción, son suficientes (Seierstrad y Sydsaeter, pp. 107) tenemos que el hamiltoniano asociado al sector privado será:

$$H_1(K,Z,\psi_1,\psi_2;m) \equiv (m(1-\beta)+\psi_1(1-m)(1-\beta)+\psi_2(1-s)\beta)f(K,Z),$$

y el asociado al sector público:

$$H_2(K,Z,\psi_3,\psi_4;s,\beta) \equiv (s\beta+\psi_3(1-m)(1-\beta)+\psi_4(1-s)\beta)f(K,Z),$$

donde $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ son las variables de coestado asociadas al problema del sector privado y al capital privado y público respectivamente; y $\psi_3(t), \psi_4(t)$ son las variables de coestado asociadas al problema del sector público con la misma correspondencia que en el caso anterior.

Al analizar los programas: $max\ H_1(K,Z,\psi_1,\psi_2;m)\ s.a.: 0 \le m \le 1$ y $max\ H_2(K,Z,\psi_3,\psi_4;s,\beta)\ s.a.: 0 \le s \le 1, \beta_1 \le \beta \le \beta_2$ junto con el sistema dinámico que satisfacen las variables de coestado:

$$\begin{aligned}
-\dot{\psi}_1 &= f_K'[m(1-\beta)+\psi_1(1-m)(1-\beta)+\psi_2(1-s)\beta],\\
-\dot{\psi}_2 &= f_Z'[m(1-\beta)+\psi_1(1-m)(1-\beta)+\psi_2(1-s)\beta],\\
-\dot{\psi}_3 &= f_K'[s\beta+\psi_3(1-m)(1-\beta)+\psi_4(1-s)\beta],\\
-\dot{\psi}_4 &= f_Z'[s\beta+\psi_3(1-m)(1-\beta)+\psi_4(1-s)\beta],
\end{aligned}$$

con $\psi_1(T)=\psi_2(T)=\psi_3(T)=\psi_4(T)=0$, encontramos que si la amplitud del horizonte es suficiente, en la estrategia de Nash existen dos momentos de tiempo $t^m$ y $t^s$, iguales o distintos, que dividen al horizonte $T$ en subintervalos. Los momentos $t^m$ y $t^s$ están determinados por las relaciones $\psi_1(t^m)=1$ y $\psi_4(t^s)=1$. Antes de $t^m$ el sector privado sólo invierte y después sólo consume. Lo mismo puede establecerse respecto a $t^s$ y el sector público. Tenemos, por tanto, tres *equilibrios dependiendo de la relación entre el momento $t^s$ y $t^m$. En ellos existe* un intervalo $[0, min\{t^s,t^m\}]$ donde ambos sectores invierten y otro intervalo $(max\{t^s,t^m\},T]$ donde los sectores sólo consumen con una tasa impositiva $\beta_2$. Durante todo el horizonte del juego las variables de coestado satisfacen:

$$\frac{d\psi_1}{d\psi_2}=\frac{d\psi_3}{d\psi_4}=\frac{f_K'(K,Z)}{f_Z'(K,Z)}, \qquad (1)$$

y durante el intervalo $(min\{t^s,t^m\}, max\{t^s,t^m\}]$, con $t^s \ne t^m$, tenemos:

$$\frac{d\psi_1}{d\psi_3}=\frac{d\psi_2}{d\psi_4}=constante \qquad (2)$$

esta *constante* es igual a $2(1-\beta_2)/\beta_2$ si $min\{t^s, t^m\} = t^m$; en caso contrario, toma el valor:

$$\frac{(1-\beta_1)(1-\beta_2)}{(1-\beta_2)\beta_1+(1-\beta_1)\beta_2}.$$

Considerando las ecuaciones diferenciales de las variables de coestado sobre $\left(max\{t^s, t^m\} = t', T\right]$ obtenemos:

$$\psi_1(t') = f'_K(\overline{K},\overline{Z})(1-\beta_2)(T-t') <= 1 \qquad (3)$$
$$\psi_4(t') = f'_Z(\overline{K},\overline{Z})\beta_2(T-t') <= 1 \qquad (4)$$

donde al menos una igualdad en (3) o en (4) se verifica. $\overline{K}$ y $\overline{Z}$ son valores constantes de los capitales privado y público en el intervalo que estamos analizando, al inicio del cual la variable $\psi_3$ alcanza el valor $\beta_2 f'_K(\overline{K},\overline{Z})(T-t')$ y la variable $\psi_2$ satisface la relación $\psi_2(t')\psi_3(t') = \psi_1(t')\psi_4(t')$.

Las trayectorias que determinan los equilibrios de Nash dependen de los valores de las tasas de impuestos, pero fundamentalmente de $\beta_2$. Supondremos en primer lugar $2\beta_2 \geq 1$, para posteriormente analizar el caso complementario. Si $t^s = t^m$, desde las relaciones (3) y (4), encontramos la relación $f'_K(\overline{K},\overline{Z})/f'_Z(\overline{K},\overline{Z}) = \beta_2/(1-\beta_2)$ que caracteriza el equilibrio. Si $t^s < t^m$, la amplitud de $\left(t^m, T\right]$ se determina desde (3) que se satisface en igualdad, mientras (4) lo hace en desigualdad estricta; entonces, sólo en este equilibrio se verifica $f'_K(\overline{K},\overline{Z})/f'_Z(\overline{K},\overline{Z}) > \beta_2/(1-\beta_2) \geq 1$. En el intervalo $\left(t^s, t^m\right]$, donde el capital público permanece con un valor constante $\overline{Z}$ y los impuestos se determinan con la tasa impositiva más pequeña, pues $\psi_3$ se mantiene con un valor superior a la unidad en todo el intervalo, tendremos desde (2) y la ecuación diferencial para $\psi_2$:

$$\frac{(1-\beta_1)+\beta_1\dfrac{f'_Z(\overline{K},\overline{Z})}{f'_K(\overline{K},\overline{Z})}}{\beta_1+(1-\beta_1)\dfrac{\beta_2}{(1-\beta_2)}} = \frac{f'_Z(\overline{K},\overline{Z})}{f'_K(\overline{K},\overline{Z})} + \int_{K(t^s)}^{\overline{K}} \frac{f(\overline{K},\overline{Z})}{f(K,\overline{Z})}\frac{f'_Z(K,\overline{Z})}{f(K,\overline{Z})}dK, \qquad (5)$$

que permite encontrar una relación entre $K(t^s), \overline{K}$ y $\overline{Z}$. El momento $t^s$ también viene determinado en función de los valores anteriores, al integrar la ecuación diferencial del capital privado en el intervalo:

$$\int_{K(t^s)}^{\overline{K}} \frac{dK}{f(K,\overline{Z})} = (1-\beta_1)(t^m - t^s),$$

y en él se satisface $\psi_3(t^s) \geq \psi_4(t^s)$.

Si $t^m < t^s$, la amplitud de $\left(t^s, T\right]$ se determina desde (4) que se satisface en igualdad, mientras (3) lo hace en desigualdad estricta. Desde el valor de $\psi_1$ en $t^s$, tenemos para este equilibrio $f_K'(\overline{K},\overline{Z}) / f_Z'(\overline{K},\overline{Z}) < \beta_2 / (1-\beta_2) \geq 1$. Entonces, puede ocurrir que el ratio de las productividades de los capitales $f_K'(\overline{K},\overline{Z}) / f_Z'(\overline{K},\overline{Z})$ sea mayor, menor o igual a la unidad, si la tasa de impuestos $\beta_2$ es superior a $1/2$. En el intervalo $\left(t^m, t^s\right]$ donde el capital privado permanece con el valor constante $\overline{K}$ y los impuestos con la tasa impositiva más alta, al ser $\psi_4$ positiva, se verifica desde (2) y la ecuación diferencial para $\psi_3$:

$$\frac{\beta_2}{2(1-\beta_2)} = \frac{f_K'(\overline{K},\overline{Z})}{2f_Z'(\overline{K},\overline{Z})} + \int_{Z(t^m)}^{\overline{Z}} \frac{f(\overline{K},\overline{Z})}{f(\overline{K},Z)} \frac{f_K'(\overline{K},Z)}{f(\overline{K},Z)} dZ. \qquad (6)$$

También ahora es posible determinar la amplitud del intervalo $\left(t^m, t^s\right]$ integrando la ecuación diferencial del capital público:

$$\int_{Z(t^m)}^{\overline{Z}} \frac{dZ}{f(\overline{K},Z)} = \beta_2(t^s - t^m).$$

En el momento $t^m$ el signo de:

$$\psi_3(t^m) - \psi_4(t^m) = \frac{f_K'(\overline{K},\overline{Z})}{2f_Z'(\overline{K},\overline{Z})} + \frac{\beta_2}{2(1-\beta_2)} - \frac{f(\overline{K},\overline{Z})}{f(\overline{K},Z(t^m))},$$

no está determinado si $\beta_2 > 1/2$, lo que condiciona la tasa impositiva de este equilibrio en el subintervalo inicial. Si $\beta_2 = 1/2$, la diferencia anterior es positiva.

Si al plantear el modelo conocemos que $2\beta_2 < 1$, desde las relaciones (3) y (4), que siguen siendo válidas, volvemos a encontrarnos con tres equilibrios. Las diferencias con respecto a los analizados anteriormente, provienen de que la relación $\beta_2/(1-\beta_2)$ es menor que la unidad, lo que condiciona los valores de las variables de coestado en los extremos de los intervalos y, por tanto, influirá sobre las tasas de impuestos óptimas. Si $t^s = t^m$, se obtiene $\psi_3(t^s) < 1 = \psi_4(t^s)$, condición diferente a la de la situación anterior. Las diferencias con respecto al equilibrio cuando $t^s < t^m$ son más acusadas, pues al satisfacerse que las variables de coestado $\psi_3$ y $\psi_4$ son menores que la unidad en $t^m$, podría ocurrir que existiese un momento de tiempo $t^I \in \left(t^s, t^m\right]$ tal que en el intervalo $\left(t^s, t^I\right]$ los impuestos óptimos fueran mantener $\beta_1$ y en el intervalo $\left(t^I, t^m\right]$ fuera óptimo utilizar $\beta_2$. Si $\psi_3(t^m) \leq \psi_4(t^m) < 1$, garantizado si se satisface la relación $1 \leq f_Z'(\overline{Z}, \overline{K}) / f_K'(\overline{K}, \overline{Z}) < (1-\beta_2)/\beta_2$, no hay cambio de impuestos sobre el intervalo $\left(t^s, t^m\right]$ manteniéndose $\beta_2$. En particular, si $\psi_3(t^m) = \psi_4(t^m)$ se obtiene $\psi_3(t^s) = \psi_4(t^s)$ sin más que observar (2). La expresión (5) es válida sin más que sustituir $\beta_1$ por $\beta_2$. En el caso de que $\psi_3$ supere a $\psi_4$ en $t^m$, el momento $t^I$ existe y en él se satisface $\psi_3(t^I) = 1$. Sobre este equilibrio se tiene además $f(K(t^I), \overline{Z}) = 2\beta_2 f(\overline{K}, \overline{Z})$ y la variable $\psi_4$ en $t^I$ alcanza el valor:

$$\psi_4(t^I) = \frac{\beta_2}{1-\beta_2} \frac{f_Z'(\overline{K}, \overline{Z})}{f_K'(\overline{K}, \overline{Z})} + \frac{2\beta_2}{1-\beta_2} \int_{K(t^I)}^{\overline{K}} \frac{f(\overline{K}, \overline{Z})}{f(K, \overline{Z})} \frac{f_Z'(K, \overline{Z})}{f(K, \overline{Z})} dK < 1 . \tag{7}$$

Sobre el intervalo $\left(t^s, t^I\right]$ se verifica:

$$\frac{1-\beta_1}{2\beta_2}(1-\psi_4(t^I)) = \int_{K(t^s)}^{K(t^I)} \frac{f(\overline{K}, \overline{Z})}{f(K, \overline{Z})} \frac{f_Z'(K, \overline{Z})}{f(K, \overline{Z})} dK , \tag{8}$$

superando la variable $\psi_3$ a $\psi_4$ en $t^s$. La amplitud de los intervalos se determina por las expresiones:

$$\int_{K(t^I)}^{\overline{K}} \frac{dK}{f(K, \overline{Z})} = (1-\beta_1)(t^m - t^I), \quad \int_{K(t^s)}^{K(t^I)} \frac{dK}{f(K, \overline{Z})} = (1-\beta_2)(t^I - t^s) .$$

Por último, si $t^m < t^s$, las diferencias en el equilibrio por modificaciones del valor de $\beta_2$ no son destacables, aunque ahora, la diferencia $\psi_3(t^m) - \psi_4(t^m)$ es negativa.

Durante el intervalo $\left[0, min\left\{t^{x}, t^{m}\right\}\right]$ la comparación del ratio $\psi_3 / \psi_4$ con la unidad determina la tasa impositiva. Si $\psi_3 > \psi_4$ seleccionaremos $\beta_1$, si $\psi_3 < \psi_4$ tomaremos $\beta_2$. En particular, si $\psi_3 = \psi_4$ durante un intervalo finito de tiempo en él se tiene que mantener $f'_K = f'_Z$ y la tasa impositiva será:

$$\beta(t) = \frac{f''_{KK} - f''_{ZK}}{f''_{KK} + f''_{ZZ} - 2f''_{ZK}} \in [\beta_1, \beta_2].$$

Para cada tasa de impuestos seleccionada, el sistema dinámico que forman las ecuaciones diferenciales del capital público y privado satisface las condiciones de existencia y unicidad (Coddington y Levinson, pp. 8) , por lo que conocidas sus condiciones iniciales tendremos un única trayectoria durante un intervalo de amplitud $min\left\{t^{x}, t^{m}\right\}$. Estas relaciones junto con las obtenidas para cada equilibrio permiten determinar los valores de los capitales desconocidos. En este intervalo, los capitales satisfacen la relación:

$$\frac{dZ}{dK} = \frac{\beta}{1-\beta} \quad , \qquad (9)$$

entonces, si $\beta = \beta_1$ el capital público crece más que el privado y si $\beta = \beta_2 > 1/2$ ocurre al revés. Ambos presentan el mismo crecimiento si $\beta = 1/2$ es admisible y puede mantenerse sobre un intervalo finito de tiempo.

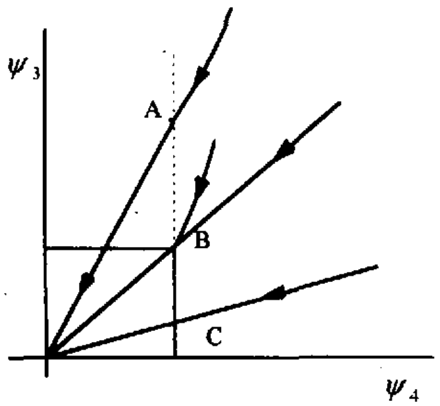
Sobre qué tasa impositiva seleccionar en este primer intervalo o si hay modificaciones de la tasa en él, en principio no puede asegurarse nada, depende de la tecnología, que influye por medio de las productividades marginales en la evolución de las variables de coestado $\psi_3$ y $\psi_4$. Sin embargo, sobre un subintervalo final de $\left[0, min\left\{t^{x}, t^{m}\right\}\right]$ puede conocerse la tasa impositiva óptima, al tener en cuenta el valor del ratio $\psi_3 / \psi_4$ en cada equilibrio en el momento $min\left\{t^{x}, t^{m}\right\}$.

### 3.1. Análisis sobre una tecnología no lineal

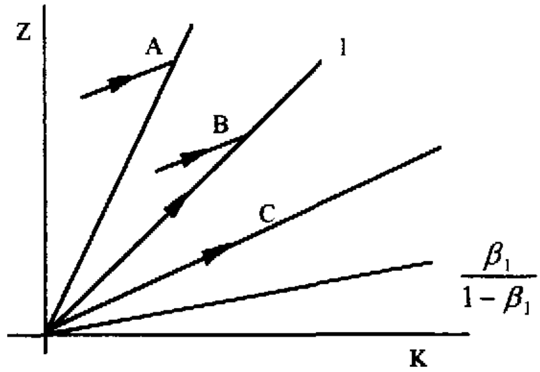
Si la función de producción es conocida cabe la posibilidad de que se puedan obtener las trayectorias que siguen los jugadores, al menos desde un punto de vista cualitativo, durante el primer subintervalo del horizonte de planificación. Con este objetivo tomamos una tecnología específica, no lineal y que verifica las condiciones exigidas, como es una Cobb-Douglas:

$$f(K,Z)=K^{\frac{1}{2}}Z^{\frac{1}{2}}.$$

Estudiamos en primer lugar el caso $t^s=t^m$, entonces el horizonte temporal está dividido en dos intervalos que corresponden a decisiones simultáneas de consumo e inversión para ambos jugadores. Sabemos que cuando ambos consumen, la tasa de impuestos es la más alta. La gráfica 1 recoge mediante los puntos A, B y C los valores de las variables de coestado $\psi_3$ y $\psi_4$ en $t^s$ en su plano de fase cuando $2\beta_2$ es mayor, menor o igual a la unidad, respectivamente.



Gráfica 1.



Gráfica 2.

Para determinar la tasa de impuestos en el intervalo $[0,t^s=t^m]$ analizamos el comportamiento de la pendiente en el plano $(\psi_3,\psi_4)$. Desde la expresión (1) tenemos:

$$\frac{d\psi_3}{d\psi_4}=\frac{f'_K(K,Z)}{f'_Z(Z,K)}=\frac{Z}{K}=h(t),$$

con $h(t^s)=\beta_2/(1-\beta_2)$. El signo de $h'(t)$ coincide con el signo de $\beta K-(1-\beta)Z$, luego es función de los valores de capital público y privado y de $\beta$, determinado por el ratio $\psi_3/\psi_4$ mayor, menor o igual a la unidad. En la gráfica 2, se realiza la correspondencia de los puntos A, B y C en el plano de fase $(Z,K)$.

Cuando $\psi_3(t^s)>\psi_4(t^s)$, para alcanzar el punto A hay que aplicar $\beta_1$, entonces, $h'(t)<0$ y $\psi_3$ crece, en tiempo reverse, con respecto a $\psi_4$, por tanto, la tasa de impuestos será $\beta_1$ en el intervalo $\left[0,t^s\right]$. Este equilibrio está caracterizado por: $(1-\beta_1)(\overline{Z}-Z_0)=\beta_1(\overline{K}-K_0)$ desde la relación (9) y

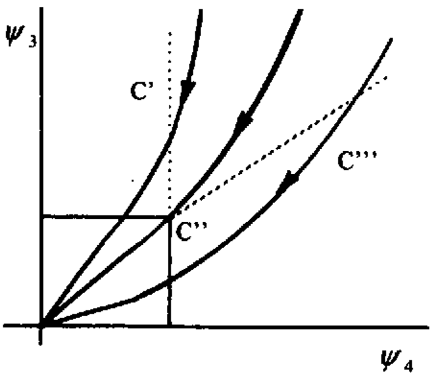
$$\int_{\overline{K}}^{K_0}\frac{dK}{K^{\frac{1}{2}}\left[Z_0+\frac{\beta_1}{1-\beta_1}(K-K_0)\right]^{\frac{1}{2}}}=(1-\beta_1)\left[T-\frac{2\overline{K}^{\frac{1}{2}}}{(1-\beta_2)\overline{Z}^{\frac{1}{2}}}\right],$$

por el valor de $t^s$. Desde estas relaciones podemos encontrar $\overline{Z}$ y $\overline{K}$ en función de $Z_0, K_0$ y $T$. Para optimalidad se tendrá que verificar la característica del equilibrio $(1-\beta_2)\overline{Z}=\beta_2\overline{K}$. El punto B puede obtenerse manteniendo $\beta_1$ o $\beta_2$ en todo el intervalo $\left[0,t^s\right]$. Si se selecciona $\beta_1$, para su optimalidad se necesita que se verifiquen las mismas condiciones anteriormente expuestas sustituyendo $2\beta_2$ por la unidad. La tasa $\beta_2$ será seleccionada si $Z_0=K_0$, esto es, la pendiente de los capitales permanece constante e igual a uno, sobre el intervalo inicial. La amplitud del intervalo terminal es de 4 u.t. La trayectoria que alcanza C donde $\psi_3(t^s)<\psi_4(t^s)$ utiliza siempre la tasa $\beta_2$ permaneciendo constante la pendiente $h(t)$. Notemos que la derivada de la pendiente en $t^s$ es cero. Las relaciones establecidas para el primer caso de esta sección determinan la optimalidad de este equilibrio, sin más que sustituir $\beta_1$ por $\beta_2$.

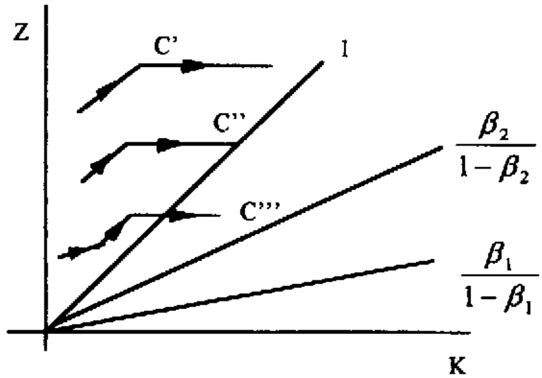
Los equilibrios si $t^s < t^m$, es decir, cuando el sector público se anticipa en el consumo respecto al sector privado, vienen condicionados por el valor de $\psi_3(t^m)$ mayor, igual o menor que la unidad si $2\beta_2$ realiza la misma comparación con ella. Si $2\beta_2\geq 1$, desde la relación (1) y volviendo a redefinir la pendiente $h(t)$, obtenemos:

$$1\leq\psi_3(t^m)=\frac{\beta_2}{1-\beta_2}<\frac{\overline{Z}}{\overline{K}}=h(t^m)<\frac{\overline{Z}}{K(t^s)}=h(t^s),$$

y durante todo el intervalo $\left[0,t^s\right]$ se mantendrá la tasa $\beta_1$, por el comportamiento de $h(t)$, cuya derivada tiene signo negativo. Si $2\beta_2<1$ podemos considerar tres casos según que $\psi_3(t^m)$ supere, coincida o sea menor que $\psi_4(t^m)$. La gráfica 3 recoge, en el plano de fase $(\psi_3,\psi_4)$, las tres alternativas denotándolas por C′, C″ y C‴, respectivamente. Sobre la trayectoria C′ tenemos $\overline{K}<\overline{Z}$ y existirá un cambio de impuestos en $t^I \in (t^s, t^m]$ de $\beta_2$ a $\beta_1$, que se mantendrá sobre $[0, t^s]$; sobre C″ con $\overline{K} = \overline{Z}$ se mantiene $\beta_1$ sobre $[0, t^s]$ y sobre la trayectoria C‴ donde $\overline{K} > \overline{Z}$ se obtiene un cambio de impuestos en $t^I \in [0, t^s]$ que pasa de $\beta_2$ a $\beta_1$. La gráfica 4 recoge las trayectorias en el plano $(K, Z)$ correspondientes a las posibilidades C′, C″ y C‴.




Gráfica 3.

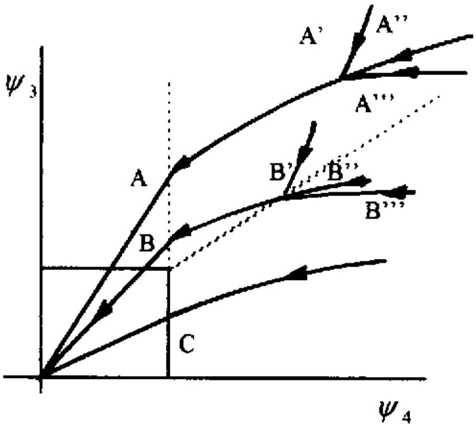



Gráfica 4.

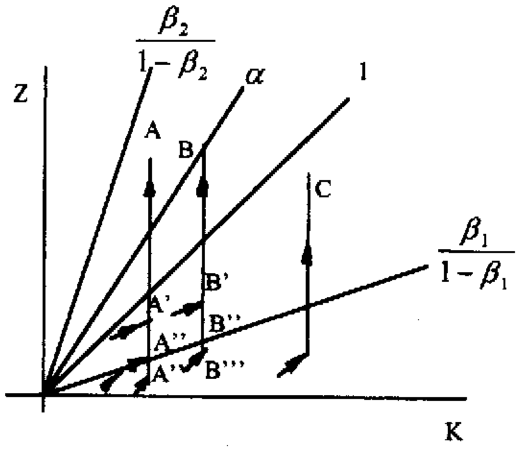
Desde las relaciones que se obtuvieron en la sección anterior podemos establecer las condiciones de optimalidad para las trayectorias. Por ejemplo, para la trayectoria C′ tenemos: $K(t^I) = 4\beta_2{}^2\overline{K}$ y, desde las relaciones (7) y (8) obtenemos $K(t^s)$ en función de $\overline{K}$ y $\overline{Z}$; si además, tenemos en cuenta la amplitud del intervalo $T = t^m + (t^I - t^m) + (t^s - t^I) + (T - t^s)$ y $(1-\beta_1)(Z(t^s) - Z_0) = \beta_1(K(t^s) - K_0)$ por el comportamiento de los capitales en $[0, t^s]$, podemos encontrar $\overline{Z}$ y $\overline{K}$ en función de $Z_0, K_0$ y $T$. Ahora, sustituyendo en $(1-\beta_2)\overline{Z} > \beta_2\overline{K}$ determinamos las condiciones de optimalidad del equilibrio. Para el resto de las trayectorias se puede utilizar el mismo procedimiento.

Por último, si $t^m < t^s$ nos volvemos a encontrar con tres posibilidades según los valores de $2\beta_2$. Consideramos solamente el caso de $2\beta_2$ mayor que la unidad, pues analizado él, las otras dos posibilidades resultan inmediatas. El valor de los capitales públicos en los momentos $t^s$ y $t^m$ están relacionados por la expresión (6), donde operando con la tecnología se obtiene:

$$Z(t^m) = \frac{\left[3\overline{Z} - \frac{\beta_2}{1-\beta_2}\overline{K}\right]^2}{4\overline{Z}} < \overline{Z}.$$




Gráfica 5.




Gráfica 6.

Si volvemos a considerar la pendiente $h(t)$ tenemos:

$$\frac{Z(t^m)}{\overline{K}} = h(t^m) < \frac{\overline{Z}}{\overline{K}} = h(t^s) < \frac{\beta_2}{1-\beta_2},$$

y sustituyendo $Z(t^m)$ en la expresión que determina la diferencia $\psi_3(t^m) - \psi_4(t^m)$, encontramos que esta última diferencia puede expresarse como:

$$\frac{\overline{Z}}{\overline{K}} - \frac{2}{3}\left[1 - \frac{\beta_2}{2(1-\beta_2)} + \sqrt{1 - \frac{\beta_2}{1-\beta_2} + \frac{\beta_2{}^2}{(1-\beta_2)^2}}\right] = \frac{\overline{Z}}{\overline{K}} - \alpha, \quad \frac{\beta_2}{(1-\beta_2)} > \alpha > 1.$$

En función de los valores que alcance dicha diferencia podemos determinar la tasa de impuestos. Si es positiva, el signo de $h'(t^m) = \beta_1 \overline{K} - (1-\beta_1)Z(t^m)$ depende del valor de $Z(t^m) < \overline{K}$. La gráfica 6 recoge en los puntos A', A'' y A''' posibles valores de $Z(t^m)$ y la gráfica 5 las correspondencias en el plano de fase $(\psi_3, \psi_4)$. Observamos que las trayectorias que contienen a A'' y A''' presentan un cambio de impuestos en $t' \in \left[0, t^m\right]$ de $\beta_1$ a $\beta_2$. Si la diferencia es nula, también $Z(t^m) < \overline{K}$ y volvemos a tener las mismas opciones que en el caso anterior y que denotamos, sobre las gráficas, por B', B'' y B'''. Notemos que la pendiente decrece para alcanzar B' y $\beta_1$ se mantiene sobre todo el intervalo inicial; crece para alcanzar B'' y B''' manteniéndose $\beta_2$. Sin embargo, si $\psi_3(t^m) < \psi_4(t^m)$ la pendiente crece al verificarse $Z(t^m) < (\beta_2 / (1-\beta_2))\overline{K}$, situación compartida con el caso $2\beta_2 \leq 1$. La tasa de impuestos $\beta_2$ se mantiene.

Para determinar las condiciones de optimalidad seleccionamos la trayectoria que contiene al punto A''' con un cambio de impuestos en el primer intervalo. Esta trayectoria se caracteriza por las desigualdades: $\overline{Z} > \alpha\,\overline{K}$, $(1-\beta_1)Z(t^m) < \beta_1\overline{K}$. Designamos por $t^I$ el momento en el que la trayectoria alcanza la recta $\psi_3 = \psi_4$ por $\psi(t) = \beta_1\psi_3(t) + (1-\beta_1)\psi_4(t)$ y operando sobre las ecuaciones diferenciales que las variables de coestado $\psi_3$ y $\psi_4$ satisfacen sobre el intervalo $\left(t^I, t^m\right]$ tenemos:

$$-\int_1^{\psi(t^m)} \frac{d\psi}{\psi} = \int_{K(t^I)}^{\overline{K}} \left(\frac{\beta_1}{(1-\beta_1)} \frac{f'_K(K,Z(K))}{f(K,Z(K))} + \frac{f'_Z(K,Z(K))}{f(K,Z(K))}\right) dK,$$

donde $\psi(t^m) = \beta_1\psi_1(t^m) + (1-\beta_1)\psi_2(t^m)$ y $Z(K) = Z(t^m) + (\beta_1 / (1-\beta_1))(K - \overline{K})$. Estas dos últimas expresiones permiten determinar $K(t^I)$ y $Z(t^I)$ en función de $\overline{K}$ y $\overline{Z}$. La amplitud del intervalo puede obtenerse desde el comportamiento del capital privado:

$$\int_{K(t^I)}^{\overline{K}} \frac{dK}{f(K,Z(K))} = (1-\beta_1)(t^m - t^I),$$

que también determina $t^I$:

$$\int_{K_0}^{K(t^I)} \frac{dK}{f(K,Z(K))} = (1-\beta_2)\,t^I,$$

donde, en la última expresión $Z(K) = Z(t^I) + (\beta_2 / (1-\beta_2))(K - K(t^I))$, válida para $K_0, Z_0$. Todas las relaciones obtenidas, junto con la ecuación de los tiempos, nos permiten, aplicadas sobre la característica específica del equilibrio, obtener el objetivo propuesto.

### 3.2.- La tecnología lineal.

Nos ocupamos en esta sección de los equilibrios de Nash cuando la tecnología es una función lineal del capital privado y público:

$$f(K,Z) = aK + bZ, \qquad a > 0, b > 0.$$

Los resultados y características de los equilibrios, en este caso, se simplifican y aparecen propiedades nuevas ligadas a la estructura del planteamiento del modelo (Yeung, (1994) pp. 166 y (1995) pp. 323).

Los tres equilibrios de la sección tercera surgen al comparar el ratio productividad marginal del capital privado-productividad marginal del capital público, que ahora es una constante, con respecto a la función $\beta_2/(1-\beta_2)$. Desde la expresión (1), las trayectorias en el plano de fase $(\psi_3, \psi_4)$ son rectas pasando por el origen y con pendiente el ratio de las productividades, por ello, puede determinarse fácilmente la tasa de impuestos óptima en cada uno de los intervalos de que constan los equilibrios encontrándose algunas características comunes en ellos. Así, si el ratio entre las productividades marginales es mayor o igual a la unidad, existe un momento $t' \in (0,T)$ de modo que en el intervalo $[0,t']$ se utiliza la tasa impositiva $\beta_1$ y sobre $(t',T]$ la tasa $\beta_2$. Si el ratio es la unidad sobre el intervalo $[0,t']$ se utiliza cualquier $\beta(t) \in [\beta_1, \beta_2]$ mientras que en el intervalo final siempre se utiliza $\beta_2$. Si el ratio es inferior a la unidad, la tasa de impuestos no varia en todo el horizonte temporal, siempre se mantiene $\beta_2$.

El equilibrio si $a(1-\beta_2) = b\beta_2$ desde (3) y (4), se caracteriza porque los momentos $t^s$ y $t^m$ coinciden y satisfacen: $t^s = T - (1/b\beta_2)$. Los consumos óptimos de los jugadores son:

$$J_{PR} = \frac{a\overline{K} + b\overline{Z}}{a}, \qquad J_{PU} = \frac{a\overline{K} + b\overline{Z}}{b},$$

donde el ratio de las productividades es el que determina quién obtiene un mayor consumo; $\overline{K}$ y $\overline{Z}$ son los valores constantes de los capitales sobre el intervalo final $(t^s, T]$, donde sólo se consume y verifican:

$$a\overline{K} + b\overline{Z} = (aK_0 + bZ_0)e^{(a(1-\beta)+b\beta)(T-\frac{1}{b\beta_2})},$$

con $\beta = \beta_1$ si $2\beta_2 > 1$, $\beta = \beta_2$ si $2\beta_2 < 1$ y $a\overline{K} + b\overline{Z} = (aK_0 + bZ_0)e^{a(T-\frac{1}{b\beta_2})}$ si $2\beta_2 = 1$, debido al crecimiento exponencial de la producción en el intervalo inicial.

Si la relación es $a(1-\beta_2) > b\beta_2$, los momentos de consumo e inversión para el sector público y privado no coinciden y se satisface $t^s < t^m$, donde el momento $t^m$ es determinado por la relación $t^m = T - (1/a(1-\beta_2))$. En este equilibrio podemos encontrar cuatro formas distintas de aplicar los impuestos, (gráfica 7), que influye en el crecimiento de la producción cuando sólo invierte el sector privado, pues en esa situación capital privado y producción crecen al mismo tanto. Si $2\beta_2 \geq 1$ y $a > b$ hay un cambio de impuestos de $\beta_1$ a $\beta_2$ en $t^m$. Desde (5) podemos encontrar la amplitud del intervalo $(t^s, t^m]$ :

$$\frac{\beta + (1-\beta)\dfrac{\beta_2}{(1-\beta_2)}}{\beta + (1-\beta)\dfrac{a}{b}} = e^{-a(1-\beta)(t^m - t^s)}, \qquad (10)$$

con $\beta = \beta_1$. Si $a \leq b$, la expresión (10) sigue siendo válida con $\beta = \beta_2$. Los consumos privado y público óptimos son:

$$J_{PR} = \frac{a\overline{K} + b\overline{Z}}{a}, \qquad J_{PU} = \frac{\beta}{1-\beta}\left[\overline{K} - K(t^s)\right] + \frac{\beta_2}{1-\beta_2}\frac{a\overline{K} + b\overline{Z}}{a},$$

donde $\overline{K}$ y $\overline{Z}$ son los valores constantes de los capitales sobre el intervalo $(t^m, T]$, que verifican: $a\overline{K} + b\overline{Z} = (aK_0 + bZ_0)e^{(a(1-\beta)+b\beta)t^s + a(1-\beta_2)(t^m - t^s)}$, siempre con $\beta = \beta_1$ si $2\beta_2 \geq 1$ y $\beta = \beta_2$ si $a \leq b$, en cuyo caso consume más el sector privado que el público. Si los parámetros satisfacen $2\beta_2 < 1$ y $a > b$, el cambio de impuestos de $\beta_1$ a $\beta_2$ se produce en $t^l \in (t^s, t^m)$, ahora desde las relaciones (7) y (8) encontramos las amplitudes de los intervalos:

$$\beta_1 + (1-\beta_1)\frac{a}{b} = e^{a(1-\beta_1)(t^l - t^s)}, \qquad 2\beta_2 = e^{-a(1-\beta_2)(t^m - t^l)},$$

y los consumos óptimos de los jugadores satisfacen las expresiones:

$$J_{PR} = \frac{a\overline{K} + b\overline{Z}}{a}, \quad J_{PU} = \frac{\beta_1}{1-\beta_1}\left[K(t^l) - K(t^s)\right] + \frac{\beta_2}{1-\beta_2}\left[\overline{K} - K(t^l)\right] + \frac{\beta_2}{1-\beta_2}\frac{a\overline{K} + b\overline{Z}}{a},$$

con $a\overline{K} + b\overline{Z} = (aK_0 + bZ_0)e^{(a(1-\beta_1)+b\beta_1)t^s + a(1-\beta_1)(t^l - t^s) + a(1-\beta_2)(t^m - t^l)}$. Ahora, la producción en el intervalo donde el sector público consume crece a dos diferentes tantos igual que el capital privado.

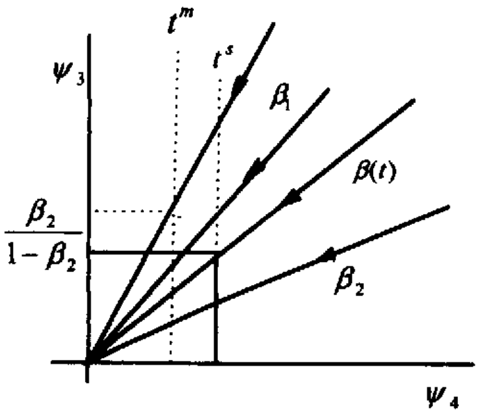
Si $a(1-\beta_2)<b\beta_2$, el momento $t^m$ es inferior a $t^s$ determinado por la relación $t^s=T-(1/b\beta_2)$. En este equilibrio cuando hay cambio de impuestos, éstos se producen siempre en el momento $t^m$. La gráfica 8 recoge, sobre el plano de fase $(\psi_3,\psi_4)$, las distintas posibilidades. Para determinar la amplitud del intervalo $\left(t^m,t^s\right]$, donde el capital privado permanece constante y el capital público y la producción lo hacen al tanto $b\beta_2$, basta considerar la ecuación diferencial que la variable $\psi_2$ satisface en él, donde la tasa de impuestos es $\beta_2$. Operando, obtenemos:

$$\frac{a(1-\beta_2)+b\beta_2}{2a(1-\beta_2)}=e^{b\beta_2(t^s-t^m)}. \qquad (11)$$

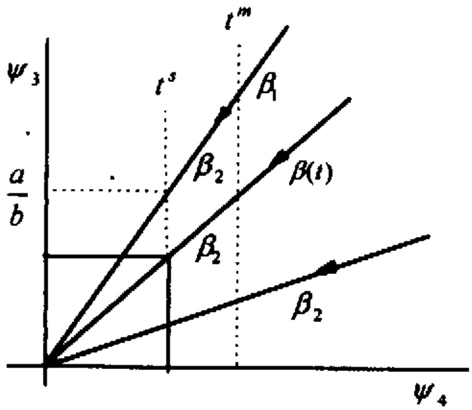
En este equilibrio, los consumos que con los controles óptimos obtienen los jugadores pueden expresarse:

$$J_{PR}=\frac{1-\beta_2}{\beta_2}\left[\overline{Z}-Z(t^m)\right]+\frac{1-\beta_2}{\beta_2}\frac{a\overline{K}+b\overline{Z}}{b}, \qquad J_{PU}=\frac{a\overline{K}+b\overline{Z}}{b},$$

siendo $a\overline{K}+b\overline{Z}=(aK_0+bZ_0)e^{(a(1-\beta)+b\beta)t^m+b\beta_1(t^s-t^m)}$, con $\beta=\beta_1$ si $a>b$, $\beta=\beta_2$ si $a\le b$.




Gráfica 7.




Gráfica 8.

Los controles óptimos que utilizan los jugadores en el equilibrio de Nash analizado en esta sección, dependen de forma exclusiva del tiempo. Por ello, si nos planteamos encontrar el mismo equilibrio a partir del momento $t \in (0,T]$ y con unas condiciones iniciales sobre los capitales público y privado $(K(t),Z(t))$, se obtendría la misma regla de control en el subjuego; de ahí que los controles óptimos encontrados tienen la característica de ser consistentes fuertes en el tiempo y el equilibrio de ser perfecto en los subjuegos (Basar y Olsder, pp. 257 y 327 ).

## 4.- Estrategias de amenaza.

Para construir una estrategia de amenaza creíble por los jugadores, necesitamos una estrategia de Nash con consistencia fuerte y una estrategia más eficiente que ella (Mehlmann, pp. 69, Seierstad, pp. 879). La estrategia de amenaza, que supone cierto grado de cooperación entre los jugadores, sigue el principio siguiente por parte de cualquier jugador: "sigo la estrategia más eficiente, pero en el momento en que tu dejes de seguirla, vuelvo a la estrategia de Nash". La estrategia de amenaza es cuestionada por seguir la máxima del "punto y final"; sin embargo, tiene la ventaja de ser también un equilibrio perfecto en los subjuegos.

Nos ocupamos ahora de construir, desde la estrategia de Nash de la sección anterior, otra estrategia más eficiente. Supongamos, en primer lugar, que se verifica $a(1-\beta_2) = b\beta_2$. En este caso, los consumos de los jugadores con la estrategia de Nash pueden expresarse:

$$J^N{}_{PR} = (1-\beta_2)(aK_0+bZ_0)g(t^s), \qquad J^N{}_{PU} = \beta_2(aK_0+bZ_0)g(t^s),$$

donde la función $g(t)$ viene definida: $g(t) = (T-t)e^{\int_0^t [a(1-\beta(x))+b\beta(x)]dx}$,

con $0 < t < T$. Definimos, ahora, una estrategia para los jugadores con una estructura análoga a la de Nash, del modo siguiente: ambos invierten en $[0,t^*]$ y consumen en $\left(t^*, T\right]$ donde el sector público mantiene la tasa $\beta_2$. La amplitud del último intervalo es igual a: $1/2b\beta_2$ si $2\beta_2 > 1$, $1/a$ si $2\beta_2 = 1$ y $1/(a(1-\beta_1)+b\beta_1)$ si $2\beta_2 < 1$. Los impuestos sobre el intervalo $\left[0, t^*\right]$ son $\beta_2$ si $2\beta_2 > 1$, $\beta(t) \in \left[\beta_1, \beta_2\right]$ si $2\beta_2 = 1$ y $\beta_1$ si $2\beta_2 < 1$. Estas estrategias proporcionan un consumo a los jugadores durante el horizonte de:

$$J^E{}_{PR} = (1-\beta_2)(aK_0 + bZ_0)g(t^*), \qquad J^E{}_{PU} = \beta_2(aK_0 + bZ_0)g(t^*),$$

superior al de Nash al alcanzar la función $g(t)$ un máximo en los valores $t^*$ anteriormente considerados, según los correspondientes valores de $2\beta_2$, mayor, menor o igual a la unidad y verificarse $t^s < t^* < T$.

Si cualquier jugador amenaza con no seguir la eficiente a partir de $t^A$, para que el proceso tenga sentido el momento $t^A$ tiene que pertenecer al intervalo $(t^s, t^*)$. Los consumos de los jugadores serían:

$$J^A{}_{PR} = (1-\beta_2)(aK_0 + bZ_0)g(t^A), \qquad J^A{}_{PU} = \beta_2(aK_0 + bZ_0)g(t^A),$$

superiores a los consumos por Nash pero inferiores a los de la eficiente, debido al comportamiento de la función $g(t)$.

Si $a(1-\beta_2) > b\beta_2$, el equilibrio de Nash mantiene la tasa de impuestos $\beta_2$ durante todo el horizonte si $a < b$ y si $a = b$, mantiene $\beta_2$ salvo en el intervalo $\left[0, t^s\right]$ que el sector público utiliza $\beta(t) \in \left[\beta_1, \beta_2\right]$. Si consideramos una estrategia con las mismas características que la de Nash encontramos que si fijamos $t'''$, el consumo privado durante el horizonte crece con $t^s$ mientras que el consumo público alcanza un máximo en él. Este resultado, junto con la expresión de los consumos de los jugadores en el equilibrio de Nash:

$$J^{N}{}_{PR} = \frac{1-\beta_2}{2b\beta_2}(1+\frac{1}{y})(aK(t^s)+bZ(t^s)), \qquad J^{N}{}_{PU} = \frac{1}{b}(aK(t^s)+bZ(t^s)),$$

con $y=(a(1-\beta_2))/(b\beta_2)>1$, nos permiten construir una estrategia más eficiente que la de Nash. Para ello obligamos a los dos sectores a que simultáneamente inviertan hasta el momento $t^* > t^m$, con $T-t^* = 1/(a(1-\beta_2)+b\beta_2)$, y consuman hasta el final del horizonte. Si $a<b$ el sector público deberá mantener, durante el horizonte, las mismas tasas de impuestos que en Nash, y si $a=b$ deberá mantener $\beta(t)\in[\beta_1,\beta_2]$ en $[0,t^*]$ y $\beta_2$ en $(t^*,T]$. Teniendo en cuenta la expresión (10), los consumos de los jugadores con esta estrategia pueden expresarse:

$$J^{E}{}_{PR} = \frac{1-\beta_2}{2b\beta_2}\left[\frac{e}{2}(1+y)\right]^{\frac{1}{y}}(aK(t^s)+bZ(t^s)), J^{E}{}_{PU} = \frac{1}{2b}\left[\frac{e}{2}(1+y)\right]^{\frac{1}{y}}(aK(t^s)+bZ(t^s)),$$

y para demostrar que la estrategia así construida es más eficiente que la de Nash basta probar que se satisface $e(1+y)>2^{y+1}$ al comparar los funcionales de los jugadores en las dos estrategias. La relación anterior se verifica en igualdad para $r, 2<r<3$, lo que condiciona la eficiencia de la estrategia construida al intervalo $(a/(rb+a), a/(a+b))$ de variación de $\beta_2$. Suponiendo que $\beta_2$ es elegido apropiadamente, una estrategia de amenaza no mejora, con respecto a la eficiente, los consumos de los sectores. En efecto, la amenaza sólo puede tener sentido si se realiza en $t^A \in [t^s, t^m) \cup [t^m, t^*]$. Si nos situamos en el primer intervalo sólo conseguimos desplazar el momento $t^s$ respecto a la de Nash empeorando el consumo del sector público. El consumo del sector privado mejora a medida que $t^s$ tiende a $t^m$, pero no llega a alcanzar al consumo de la eficiente. Si nos situamos en el último intervalo, los jugadores siguen estrategias donde simultáneamente invierten y consumen, por lo que los consumos durante el horizonte dependen de la función $g(t)$, definida anteriormente, que alcanza un máximo en $t^*$.

Si los parámetros satisfacen $a(1-\beta_2)<b\beta_2$ y $a\leq b$, las estrategias de Nash son análogas a las del caso anterior en cuanto a la aplicación de los impuestos. Así, si las productividades de los capitales son iguales, se mantiene una tasa variable hasta que comienza a consumir un sector, en este caso el sector privado, para después aplicar la tasa más alta, y si $a<b$, la tasa $\beta_2$ se mantiene durante todo el horizonte. Los consumos de los jugadores en la estrategia de Nash pueden expresarse:

$$J^N{}_{PR}=\frac{1}{a}((aK(t^m)+bZ(t^m)),\qquad J^N{}_{PU}=\frac{1+z}{2b}(aK(t^m)+bZ(t^m)),$$

con $z=b\beta_2/a(1-\beta_2)>1$. Una estrategia con una estructura como la de Nash satisface que el consumo público, respecto a variaciones de $t^m$ crece y el privado alcanza su óptimo en él. Estas características similares a las del caso anteriormente analizado, nos permiten considerar una estrategia más eficiente que la de Nash igual a la anterior; ahora los consumos de los jugadores serán, teniendo en cuenta la expresión (11):

$$J^E{}_{PR}=\frac{1}{2a}\left[\frac{e}{2}(1+z)\right]^{\frac{1}{z}}(aK(t^m)+bZ(t^m)),\qquad J^E{}_{PU}=\frac{\beta_2}{(1-\beta_2)}J^E{}_{PR}$$

y para demostrar la eficiencia, basta saber si se satisface la relación $e(1+z)>2^{z+1}$. La igualdad se verifica para $r, 2<r<3$, que condiciona la eficiencia de la estrategia al intervalo de variación de $\beta_2$: $(a/(b+a), ra/(ra+b))$. Si la selección es adecuada las amenazas tampoco mejoran los consumos de los jugadores, siguiendo un razonamiento análogo al del caso anterior.

Existen dos equilibrios de Nash distintos si la relación entre los parámetros es $a(1-\beta_2) > b\beta_2$ con $a > b$, dependiendo de si $2\beta_2 \geq 1$ o $2\beta_2 < 1$. En el primer caso la tasa de impuestos $\beta_1$ se mantiene hasta el momento $t^m$ y en el segundo hasta $t^l \in (t^s, t^m)$. Si analizamos los consumos de los jugadores para una estrategia como la de Nash, cuando $2\beta_2 \geq 1$, encontramos que fijado $t^s$ el consumo privado alcanza un máximo en $t^*$ definido por la relación $T - t^* = 1/a(1-\beta_1)$ y el sector público alcanza un máximo en $t^{**}$ verificando $T - t^{**} = (\beta_2 - \beta_1)/a(1-\beta_1)\beta_2$, por tanto, $t^m < t^* < t^{**}$. Si consideramos una estrategia de modo que en el intervalo $\left[0, t^s\right]$ ambos sectores inviertan con tasa de impuestos $\beta_1$, en el intervalo $\left(t^s, t^*\right]$ se siga manteniendo la tasa $\beta_1$ e invierta el sector privado y consuma el público, y durante el intervalo final $\left(t^*, T\right]$ ambos consuman con tasa de impuestos $\beta_2$; tendremos una estrategia más eficiente que la de Nash, pues simplemente se está trasladando, con respecto a ella, el punto $t^m$ a $t^*$ manteniendo fijo el momento $t^s$. Las amenazas, que sólo tienen sentido si se realizan durante el intervalo $(t^m, t^*)$, tampoco proporcionan estrategias más eficientes que la construida.

Cuando $2\beta_2 < 1$, volviendo a considerar una estructura como la de Nash, obtenemos que si los momentos $t^m$ y $t^l$ están fijos, el consumo del sector público y privado crecen si lo hace el momento $t^s$. Este resultado nos permite considerar una nueva estrategia consistente en trasladar el momento $t^s$ a $t^l$; de este modo, el instante de cambio de impuestos y donde el sector público pasa de invertir a consumir coinciden. La estrategia así definida es mejor que la de Nash y la amenaza que sólo tiene sentido si se produce en $(t^s, t^I)$ tampoco mejora el valor de los funcionales de los jugadores.

Supongamos por último que $a \in (b, b\beta_2 / (1-\beta_2))$, sabemos entonces que la estrategia de Nash tiene tres subintervalos y un cambio en la tasa de impuestos de $\beta_1$ a $\beta_2$ en $t^m < t^s$. Si analizamos el comportamiento de los consumos de los dos sectores, en una estrategia semejante a la de Nash, encontramos que fijado $t^s$, el consumo público crece con $t^m$ y el privado alcanza un máximo en un punto $t^*$ definido por la relación:

$$e^{b\beta_2(t^s - t^*)} = \frac{a(1-\beta_1) + b\beta_1}{2(a(1-\beta_2) + b(\beta_2 - \beta_1))},$$

y por tanto $t^m < t^* < t^s$. Entonces, podemos definir una nueva estrategia de la forma siguiente: que en $[0, t^*]$ el sector público utilice una tasa $\beta_1$ y que ambos sectores inviertan, sobre $(t^*, t^s]$ que consuma sólo el sector privado con una tasa de impuestos $\beta_2$ y sobre $(t^s, T]$ que consuman ambos sectores con una tasa de impuestos $\beta_2$. Esta estrategia supone un desplazamiento del momento $t^m$ de Nash a $t^*$ y por tanto, se incrementan los consumos de los dos jugadores. La amenaza sólo puede tener sentido si se lleva a cabo en $t^A \in (t^m, t^*)$ que mejora el consumo del sector privado y del público respecto a la de Nash, pero no con respecto a la eficiente construida.

## 5.- Conclusiones.

En el análisis de la solución no cooperativa de Nash en el juego planteado entre el sector público y el sector privado, se obtiene un primer resultado por el que, si el horizonte de planificación es suficiente, al principio del juego ambos sectores invierten y al final del mismo también los dos sectores consumen. Esta característica habitual en modelos donde los jugadores pueden invertir o consumir (ver Seierstad y Sydsaeter), en nuestro modelo es independiente de la tecnología. El tratamiento de los impuestos no es general en otros planteamientos y en este modelo, los impuestos recogen un cierto "poder" del sector público sobre el privado, pues el primero mediante ellos tiene la posibilidad de detraer participación del producto al sector privado, limitando sus posibilidades de consumo instantáneas. La estrategia de impuestos por parte del sector público, en términos generales, es función de la tecnología, sin embargo, independientemente de la tecnología que se considere existe una política común. Es el caso del intervalo donde los dos sectores consumen o si existe la posibilidad de un intervalo donde sólo el sector privado consume o sólo lo hace el sector público. En el primer caso la tasa impositiva es la más alta, en el segundo la más baja y en el último caso puede haber cambio de impuestos desde la tasa menor a la tasa mayor. Utilizar la tasa de impuestos más alta puede incluso repartir el producto en partes iguales, aplicar la tasa menor beneficia la disponibilidad del sector privado.

La tecnología y el horizonte de planificación son decisivos en el equilibrio. Tienen influencia en la amplitud de los intervalos donde los sectores, juntos o separados, consumen o invierten; en la política de impuestos del sector público, en el crecimiento del producto, función de las productividades marginales y de los impuestos. La influencia de las condiciones iniciales de los capitales público y privado en su evolución durante el desarrollo del juego, también es función de la tecnología y del horizonte temporal. En la tecnología lineal, las trayectorias de los capitales dependen fundamentalmente de la duración del juego, mientras que en la tecnología Cobb-Douglas las condiciones iniciales si tienen influencia en las decisiones que durante el juego toman los dos sectores.

Las propiedades que presenta el equilibrio con la tecnología lineal permiten analizar si los dos sectores podrían llegar a un cierto acuerdo para mejorar sus consumos. Las estrategias que se ofrecen suponen un esfuerzo de inversión superior al propuesto por las estrategias de Nash, aunque las políticas de impuestos no difieren substancialmente. El proceso, por tanto, conducirá a un mayor crecimiento.

El trabajo deja numerosas vías abiertas, desde el análisis de soluciones no cooperativas de Stackelberg a posiciones cooperativas entre los dos sectores, considerando tecnologías cóncavas o convexas o incluso permitiendo sustituciones entre los sectores.

## Bibliografía

ASCHAUER, D.A. (1989, a): "Does Public Capital Crowd out Private Capital", *Journal of Monetary Economics*, 24, pp.171-188.

ASCHAUER, D.A. (1989, b): "Is Public Expenditure Productive", *Journal of Monetary Economics*, 23, pp.177-200.

BASAR, T. y OLSDER, G.J. (1995): *Dynamic Noncooperative Game Theory*. London. Academic Press.

BUFFIE, E.F. (1995): "Public Investment, Private Investment, and Inflation", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 19, pp. 1223-1248.

CODDINGTON, E.A. y LEVINSON, N. (1990): *Theory of Ordinary Differential Equations*. New Delhi. Mc Graw-Hill.

HOEL, M. (1978): " Distribution and Growth as a Differential Game Between Workers and Capitalists", *International Economic Review*, 19, pp. 335-350.

JONES, L.E. y MANUELLI, R.(1990): "A Convex Model of Equilibrium Growth: Theory and Policy Implications", *Journal of Political Economy*, 98, pp.1008-1038.

LANCASTER, K. (1973). "The Dynamic Inefficiency of Capitalism", *Journal of Political Economy*, 81, pp.1092-1109.

MEHLMANN, A. (1988): *Applied Diferential Games*. Plenum Press. New York.

POHJOLA, M. (1983): "Nash and Stackelberg Solutions in a Differential Game Model of Capitalism", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 6, pp. 173-186.

SEIERSTAD, A. (1993): "The Dynamic Efficiency of Capitalis", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 17, pp. 877-886.

SEIERSTAD, A. y SYDSAETER, K. (1993): *Optimal Control Theory With Economic Applications*. Amsterdam. North-Holland.

SHIMOMURA, K. (1991): "The Feedback Equilibrium of a Differential Game of Capitalism", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 15, pp. 317-338.

TAKAYAMA, A. (1985): *Mathematical Economics*. Cambridge. Cambridge University Press.

YEUNG, D.W.K. (1994): "A Class of Differential Games with State-Dependent Closed-Loop feedback Solutions", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 62, pp. 165-174.

YEUNG, D.W.K. (1995): "Pollution-Induced Business Cycles: A Game Theoretical Analysis", en *Control and Game-Theoretic Models of the Environment*, Carraro C. y Filar J.A., Ed., pp. 319-336. Birkhäuser. Boston.