

Estudios de Economía Aplicada
Nº 8, 1997. Págs. 77-107

Modelización racional de series temporales no causales: algunas propuestas de caracterización dinámica

GIL FARIÑA M^o CANDELARIA
GONZÁLEZ CONCEPCIÓN CONCEPCIÓN

Departamento de Economía Aplicada
Universidad de La Laguna

Esta versión incluye todas las correcciones sugeridas por el evaluador, las cuales nos han parecido oportunas y por las que le quedamos muy agradecidas.

RESUMEN

En este trabajo se presenta una metodología basada en la utilización de la teoría de la representación racional de series y , en concreto, en la *aproximación de Padé*. Esta técnica permite la caracterización de métodos *computacionalmente sencillos* con los que abordar algunas cuestiones relativas a la modelización dinámica de series temporales doblemente infinitas; esto es, series no causales en las que a la información muestral disponible se incorporan las anticipaciones o expectativas que proporciona la Teoría Económica o la propia evidencia empírica sobre el comportamiento de determinadas variables.

En concreto, el método de la *tabla T* y del *ε -algoritmo generalizado*, a partir de cuyas propiedades se obtienen respectivamente la generalización del método corner clásico y del ε -algoritmo en la literatura econométrica, constituyen dos propuestas de caracterización especialmente útiles en la identificación de los órdenes polinomiales que intervienen en una formulación del *modelo de Función de Transferencia* con expectativas. Ilustramos la operatividad de ambos métodos en este tipo de especificación dinámica, presentando los resultados obtenidos a través de la realización de un ejercicio de simulación.

Palabras-clave: Modelo de Función de Transferencia, aproximación de Padé, series formales de Laurent, tabla T, ε -algoritmo generalizado.

ABSTRACT

In this paper we put forward a methodology based on the theory to represent series in a rational form and more specifically, the *Padé approximation*. This tool permits the characterisation of *simple computational* methods which allow us to study some aspects about dynamic modelisation of doubly infinite series: non causal series where the expectations provided by Economic Theory or the empirical evidence are incorporated into available sample data.

In particular, the *T table* method from which we obtain the generalisation of the corner method and the *generalised ε -algorithm* from whose properties we achieve the generalisation of the ε -algorithm in the econometric literature, are considered to be two useful proposals for the identification of the polynomial orders which are involved in a *Transfer Function model* with expectations.

Our main proposal in this paper is, therefore, to present these two methods and try to illustrate their applicability in such a model, through the results obtained from a simulated exercise.

KEY-WORDS: Transfer-Function Model, Padé approximation, Laurent formal series, T table, generalised ϵ -algorithm.

CLASIFICACIÓN AMS: 41, 62, 65, 90

1. Introducción

El interés y la preocupación existentes en los últimos años por profundizar en la consideración de la teoría de la representación racional de series en la modelización econométrica¹ han tenido como resultado el desarrollo y utilización de diversas técnicas y procedimientos en la modelización de series temporales, especialmente en el contexto de los modelos ARMA univariantes y multivariantes.

En este sentido, la utilización de una técnica relevante en el ámbito del Análisis Numérico y, en concreto, en el campo de la aproximación racional, esto es, la aproximación de Padé (AP) debida a Padé (1892) -un tipo especial de aproximación racional para la estimación del valor de una función en un punto-, se ha mostrado de especial utilidad no sólo en el estudio del comportamiento asintótico de ciertas series numéricas sino que al mismo tiempo ha contribuido a enriquecer y estimular de forma importante el estudio de la identificación dinámica entre variables.

En particular, esta herramienta y sus propiedades gozan de especial relevancia en el ámbito de la formulación de modelos racionales en términos causales, esto es, modelos que recogen la información muestral histórica disponible para las variables que se consideran y en los que se asume que la evolución futura de una variable reproduce los esquemas de comportamiento pasados. En este contexto, la utilidad de esta técnica se pone de manifiesto en tanto que, por un lado, en base a la utilización de técnicas computacionalmente adecuadas así como a la teoría de polinomios ortogonales, permite la caracterización de métodos de identificación, sencillos a nivel computacional, con los que abordar la especificación del componente determinista en ciertos modelos de series temporales tal y como se recoge, por ejemplo, en Gil (1995) y, por otro lado, sin previo conocimiento de la estructura del ruido, proporciona estimaciones si bien preliminares de los parámetros del modelo que, sin embargo, justifican su utilización como valores iniciales consistentes y fiables para la obtención de un modelo definitivo mediante la utilización de otro tipo de métodos iterativos de estimación, generalmente no lineales.

Algunos de estos procedimientos de caracterización dinámica que tienen su soporte metodológico en la AP permiten abordar la especificación de una clase particular de modelos VARMA, esto es, el *modelo de Función de Transferencia* (FT) debido a Box y Jenkins (1976). Este tipo de formulación constituye una de las representaciones dinámicas más frecuentes en los distintos ámbitos no sólo de la Economía sino también de otras Ciencias Sociales como la Geografía e incluso en aquéllas de carácter experimental como la Ingeniería o la Física, para la representación en el con-

texto input-output de sistemas estocásticos dinámicos por medio de expresiones racionales polinómicas.

En concreto, el método de la tabla C, que puede encontrarse en Baker (1975) -a partir de cuyas propiedades se obtiene el denominado método corner²- y el ε -algoritmo³ debido a Wynn (1956) son, entre otros, algunos de los métodos vinculados con la AP hasta ahora propuestos en la identificación de un modelo FT clásico.

No obstante, si bien este tipo de formulaciones dinámicas constituye un marco de análisis idóneo para el estudio de estos métodos de identificación, su consideración -sin abandonar el análisis de series temporales- a través de lo que sería el establecimiento de modelos no causales, que incorporan el conocimiento que en forma de expectativas "ex ante" o "ex post" aporta la Teoría Económica o, en su caso, la propia evidencia empírica sobre las variables del modelo, ofrece un marco teórico más amplio y en principio más adecuado para abordar el estudio de las relaciones entre variables temporales desde una perspectiva más general acorde con la realidad evolutiva existente.

En efecto, con este nuevo planteamiento de las relaciones dinámicas se conjugan y articulan los instrumentos básicos del análisis de series temporales con el establecimiento de modelos no causales, consiguiéndose abordar el estudio de la identificación racional de modelos de series temporales desde un contexto más general y que desde el punto de vista empírico se muestra capaz de superar las limitaciones que a menudo, en términos predictivos, conlleva la formulación de modelos causales.

La propuesta metodológica que subyace y sustenta esta concepción más amplia de las relaciones dinámicas, a través de una consideración evolutiva no necesariamente causal de las variables involucradas, se basa en la generalización que hace Bultheel (1987) del concepto de AP al estudio de series formales de Laurent.

Esta nueva vía que se presenta proporciona una base metodológica que permite caracterizar nuevos procedimientos con los que abordar algunas cuestiones relativas a la identificación dinámica en un marco más amplio, a través de una formulación única que de forma simultánea consigue aproximar las dos direcciones en el tiempo de una serie formal de Laurent, a la vez que recoge el caso clásico como un caso particular cuando se omite el papel de las expectativas.

Además, esta propuesta introduce en el análisis de series temporales y, en particular, en el análisis del modelo FT una nueva perspectiva en la medida en que no sólo posibilita la consideración de una formulación dinámica más amplia en su especificación a través de la generalización de los supuestos tradicionales contenidos en ella, sino también la extensión de los procedimientos habituales de identificación hasta ahora propuestos en este tipo de modelos.

Tal y como se muestra en este trabajo, el método de la *tabla T*, cuyas propiedades caracterizan la generalización del método corner clásico y el ε -algoritmo generalizado constituyen dos propuestas que resultan de especial utilidad para abordar la especifi-

cación de la parte determinista, en particular, la identificación de los órdenes polinomiales en un modelo FT con expectativas.

Una vez realizadas algunas consideraciones generales sobre la metodología a utilizar, el presente trabajo se estructura como sigue: A continuación presentamos las propiedades básicas y características más relevantes de la AP en relación con el estudio de series formales de Laurent. En el apartado 3 presentamos de forma sucinta el modelo FT con expectativas y los métodos propuestos para su identificación. Dedicamos el apartado 4 a la exposición y análisis de los resultados obtenidos mediante un ejercicio de simulación. Finalizamos el presente trabajo con las conclusiones más relevantes así como con algunas consideraciones finales y cuestiones abiertas.

2. Representación de una serie formal de Laurent mediante una función racional de órdenes finitos

La generalización de la técnica de los AP para series formales de potencias, que puede encontrarse en Baker y Graves Morris (1996), al estudio de series formales de Laurent, también llamadas series doblemente infinitas, viene dada de acuerdo con la siguiente definición, que es consecuencia de la que se propone en Bultheel (1987):

Definición de AP a series formales de Laurent (Gil, 1995).-

Dados $H, K \in \mathbb{Z}$ y $N, U \in \mathbb{N}$, el AP a la serie formal de Laurent

$$F(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i z^i \quad (c_i, z \in \mathbb{C})$$

se define como la función racional $\left[\begin{matrix} (H, K) \\ (-N, U) \end{matrix} \right]_F \equiv \frac{A_{H,K}(z)}{Q_{-N,U}(z)}$ donde

$$A_{H,K}(z) = \sum_{i=H}^K a_i z^i \quad ; \quad Q_{-N,U}(z) = Q_{-N}(z)Q_U(z) = \left(\sum_{i=-N}^0 q_i z^i \right) \left(\sum_{i=0}^U q_i z^i \right) \quad (1)$$

tal que existe una serie formal $P_K(z) = \sum_{i=-\infty}^K p_i z^i$ ($K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) para la cual se

verifica que:

$$F(z)Q_U(z) - P_K(z) = O_+(z^{K+U+1}) \quad \text{y} \quad P_K(z)Q_{-N}(z) - A_{H,K}(z) = O_-(z^{-(N-H+1)}) \quad (2)$$

donde denotamos por O_+ , O_- el orden de aproximación alcanzado en potencias de z y de z^{-1} respectivamente.

En tal caso, $\frac{P_K(z)}{Q_U(z)}$ es el AP $\left[\begin{matrix} K \\ U \end{matrix} \right]_F(z)$ y $\frac{A_{H,K}(z)}{Q_{-N}(z)}$ el AP $\left[\begin{matrix} -H \\ N \end{matrix} \right]_{PK}(z^{-1})$.

Observar que esta definición se da en forma linealizada ya que el desarrollo en serie de potencias crecientes de $\frac{A_{H,K}(z)}{Q_{-N,U}(z)}$ no está bien definido.

A partir de la definición de los determinantes de Toeplitz⁴ dados por $T_{f,g}(c_i) = \det[(c_{f+k-j})_{k,j=1}^g]$, se concluye en Gil (1995) que el AP $\left[\begin{matrix} (H,K) \\ (-N,U) \end{matrix} \right]_F$ estará bien definido si y sólo si $T_{H,N}(c_i) \neq 0$ y $T_{K,U}(c_i) \neq 0$.

En efecto, la construcción del AP $\left[\begin{matrix} (H,K) \\ (-N,U) \end{matrix} \right]_F$ tiene lugar a través de los siguientes pasos:

a) En primer lugar, se construye el AP $\left[\begin{matrix} K \\ U \end{matrix} \right]_F \equiv \frac{P_K(z)}{Q_U(z)} = \frac{\sum_{i=0}^K p_i z^i}{\sum_{i=0}^U q_i z^i}$ (Bultheel, 1987)

a la serie $F(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i z^i$ tal que $F(z)Q_U(z) - P_K(z) = O_+(z^{K+U+1})$.

En tal caso, el AP $\left[\begin{matrix} K \\ U \end{matrix} \right]_F$ estará bien definido si y sólo si $T_{K,U}(c_i) \neq 0$.

b) En segundo lugar, se construye el AP $\left[\begin{matrix} -H \\ N \end{matrix} \right]_P(z^{-1}) \equiv \frac{A_{H,K}(z)}{Q_{-N}(z)} = \frac{\sum_{i=-K}^{-H} a_{-i} z^{-i}}{\sum_{i=0}^N q_{-i} z^{-i}}$ a la

serie $P_K(z) = \sum_{i=-K}^{\infty} p_{-i} z^{-i}$ tal que $P_K(z)Q_{-N}(z) - A_{H,K}(z) = O_-(z^{-(N-H+1)})$.

En tal caso, el AP $\left[\begin{matrix} -H \\ N \end{matrix} \right]_{P_K}(z^{-1})$ estará bien definido si y sólo si $T_{H,N}(p_i) \neq 0$.

3.- El modelo FT con expectativas: formulación y métodos de identificación

La formalización de un modelo FT con expectativas donde $z_t = (y_t, x_t)$ representa un proceso bivalente estacionario con y_t unidimensional y x_t de dimensión k , se recoge en la expresión:

$$y_t = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\infty} v_{ij}^* x_{it-j}^* + \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\infty} v_{ij}^{**} x_{it+j}^{**} + N_t; \quad N_t = \frac{\theta_q(L)}{\phi_p(L)} a_t; \quad a_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (5)$$

En este tipo de modelos se supone que el comportamiento de la variable output y_t viene explicado por dos componentes: uno sistemático, descrito a través de una o más variables inputs x_t^* y x_t^{**} (que recoge los valores estimados, que pueden seguir o no la misma distribución que x_t^*) y otro no sistemático que puede admitir cualquier tipo de estructura ARMA univariante.

Así mismo, se parte a priori de la existencia de una relación dinámica de causalidad unidireccional $x_t^*, x_t^{**} \rightarrow y_t$ dada por la combinación de los efectos contemporáneos y desplazados de las variables inputs (incluyendo ahora la presencia de valores esperados recogidos por x_t^{**}) más un componente aleatorio sobre y_t .

Considerando que $L^j(x_t) = x_{t-j} \forall j \in Z$, sin pérdida de generalidad podemos obtener, en el caso más simple de una variable input, una representación más compacta de (5) dada por:

$$y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j L^j x_t + N_t \quad (6)$$

donde $x_{t-j} = x_{t-j}^*$ si $j \geq 0$, $x_{t-j} = x_{t-j}^{**}$ si $j < 0$ y $v(L) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j L^j$ representa la

Función de Respuesta al Impulso (FRI), esto es, la serie completa de pesos evaluados en todo Z .

Siguiendo las pautas que propone la metodología de AP en relación con el estudio de series doblemente infinitas, su aplicación a la identificación de un modelo FT con expectativas a través de las dos propuestas de caracterización dinámica estudiadas en el apartado anterior, esto es, la tabla T y el ϵ -algoritmo generalizado, vendría dada en los siguientes términos:

1) *Obtención de las estimaciones de los pesos v_j de la FRI $v(L)$.*

Bajo el supuesto de estabilidad para las raíces del polinomio del denominador, calculamos las estimaciones \hat{v}_j aproximando las estructuras de retardos y adelantos a través de un número finito de términos ($m < 0$ y $n > 0$), esto es,

$$y_t \cong \sum_{j=m}^n v_j x_{t-j} + N_t^*$$

Estas estimaciones que aproximan las dos direcciones en el tiempo de la FRI pueden ser obtenidas generalizando la propuesta de estimación dada en Lii (1985) para el caso clásico, en el que la FRI representa la serie de pesos o ponderaciones evaluadas en N .

En efecto, en Lii (1985) la obtención de los pesos estimados mediante MCNL (mínimos cuadrados no lineales) pasa por la consideración de que:

$$\hat{v}_j - v_j \rightarrow N(0, \sigma_j^2)$$

siendo σ_j^2 ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm S$) la varianza para un valor de S fijo.

De forma más general, son también aplicables las propiedades dadas en el caso clásico sobre la distribución asintótica de la sucesión $\{\hat{v}_j - v_j\}$, esto es,

$$\{\hat{v}_j - v_j\} \rightarrow NM(0, V_{j,k})$$

siendo $V_{j,k}$ la covarianza entre \hat{v}_j y \hat{v}_k .

2) *Construcción de las tablas T y del ε -algoritmo estimadas y determinación de los órdenes polinomiales en función de los elementos significativamente nulos de las mismas.*

Una vez obtenidas las ponderaciones de la FRI, definiendo:

$$v_{j,\max} = \max |v_j| \quad \text{y} \quad \eta_j = \frac{v_j}{v_{j,\max}} \quad \eta \equiv (\eta_j)_{j \in \mathbb{Z}}$$

evaluamos los determinantes de Toeplitz $T_{r,g}(\hat{\eta}_j)$ para la sucesión de pesos relativos estimados $(\hat{\eta}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de los valores de los retardos y adelantos sobre el máximo valor, así como el esquema iterativo del ε -algoritmo dado en (4) para los diferentes valores de k y n .

En consecuencia, la obtención de una representación única de orden finito para $v(L) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j L^j$ que aproxime simultáneamente las dos direcciones en el tiempo y posibilite la estimación, a través de un número finito de observaciones viene dada por las siguientes condiciones equivalentes:

$$a) \quad v(L) = \frac{\sum_{i=p+a}^{s+b} w_i L^i}{(1 + \sum_{i=1}^d \alpha_{-i} L^{-i})(1 + \sum_{i=1}^r \beta_i L^i)} = \frac{\sum_{i=p+a}^{s+b} w_i L^i}{\sum_{j=-d}^r \delta_j L^j}$$

$$b) T_{s+b,r}(\hat{\eta}_j) \neq 0 ; T_{p+a,d}(\hat{\eta}_j) \neq 0 ,$$

$$T_{f,g}(\hat{\eta}_j) = 0 \quad \forall f < p+a, g > d \wedge \forall f > s+b, g > r$$

$$c) \begin{aligned} \varepsilon_{2r}^{s+b-r}(\hat{\eta}_j) \neq 0, \quad \varepsilon_{2r}^j(\hat{\eta}_j) = 0, \quad \forall j > s+b-r \\ \varepsilon_{2d}^{p+a-d}(\hat{\eta}_j) \neq 0, \quad \varepsilon_{2d}^j(\hat{\eta}_j) = 0, \quad \forall j < p+a-d \end{aligned}$$

En esta representación racional⁷ para $v(L)$, $W_{p+a,s+b}(L)$ y $\delta_{-d,r}(L)$ son polinomios de Laurent de grados $(p+a, s+b)$ y $(-d, r)$ en L . La posibilidad, en este caso, de un adelanto o retraso en la respuesta de y_t ante variaciones en x_t viene recogida en la especificación de $W_{p+a,s+b}(L)$, esto es,

$$W_{p+a,s+b}(L) = w_{p+a}L^{p+a} + w_{p+a+1}L^{p+a+1} + \dots + w_aL^a + w_bL^b + \dots + w_{s+b}L^{s+b} \quad (p, s \in \mathbb{Z})$$

con $a < 0$ y $b \geq 0$. Además,

$$\delta_{-d,r}(L) = \delta_{-d}L^{-d} + \delta_{-d+1}L^{-d+1} + \dots + \delta_{r-1}L^{r-1} + \delta_rL^r \quad (d, r \in \mathbb{N})$$

Suponemos que $W_{p+a,s+b}(L)$ y $\delta_{-d,r}(L)$ no poseen factores comunes y que las raíces del polinomio característico $\delta_{-d,r}(L)$ son en módulo mayores que la unidad, con lo cual se garantiza la estabilidad del modelo.

Atendiendo a la estructura de la tabla T , esta caracterización racional para $v(L)$ se traduce en la presencia de una franja central de elementos nulos en torno a $f=0$ que determina los valores de a y b así como por la presencia de dos bloques singulares de tamaño infinito, en las esquinas superior e inferior derechas de la tabla. Estos dos bloques determinarán los valores de p , d y s , r respectivamente, siendo $(s+b+1, r+1)$ el denominado *breaking-point* (Lii, 1985) para el caso clásico y $(p+a-1, d+1)$ el análogo en el otro bloque infinito que caracteriza la serie doblemente infinita.

Esta propuesta para abordar la identificación del modelo FT con expectativas constituye la generalización del método *corner* propuesto por Liu y Hanssens (1982) para la identificación de un modelo FT clásico. En concreto, construidos los determinantes $T_{f,g}(\hat{\eta}_j)$ se obtiene una representación racional generalizada del tipo "caracterización *corner*" para la FRI $v(L)$ de órdenes (p, s, d, r, a, b) si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} T_{f,r}(\hat{\eta}_j) \neq 0, \quad f \geq b+s; \quad T_{b+s,g}(\hat{\eta}_j) \neq 0, \quad g \geq r; \quad T_{f,d}(\hat{\eta}_j) \neq 0, \quad f \leq p+a; \quad T_{p+a,g}(\hat{\eta}_j) \neq 0, \quad g \geq d \\ T_{f,g}(\hat{\eta}_j) = 0, \quad f \geq b+s+1, \quad g \geq r \wedge f \leq p+a-1, \quad g \geq d+1 \end{aligned}$$

Así, para valores de M y M' enteros mayores que $\max \{r+1, d+1\}$ y $b+s+1$ respectivamente y M'' menor que $p+a-1$, podemos construir la tabla T para la sucesión $(\hat{\eta}_j)$ que recoge esquemáticamente los órdenes del modelo en estudio. Ilustramos el caso $d < r$, con el convencimiento de que para $d=r$ y $d > r$ se obtienen análogas representaciones:

	g	1	...	d	d+1	...	r	r+1	...	M
f										
M''	0	0	0	0	0	...
...	x	...	0	0	0	0	0	...
$p+a-1$	$T_{p+a-1,0}$	x	$T_{p+a-1,d-1}$...	0	0	0	0	0	...
$p+a$	$T_{p+a,0}$	x	$T_{p+a,d-1}$	$T_{p+a,d}$	x	x	x	x	x	...
...
a	$T_{a,0}$	x	x	x	x	x	x	x	x	...
...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
b	$T_{b,0}$	x	x	x	x	x	x	x	x	...
...
$s+b$	$T_{s+b,r-1}$	$T_{s+b,r}$	x
$s+b+1$	$T_{s+b+1,r-1}$	0	0	0	...
...	x	0	0	0	...
M'

“0” representa significativamente nulo

En tal caso, la FRI $v(L)$ que aproxima las dos direcciones en el tiempo tendrá una representación racional $\frac{W_{p+a, s+b}(L)}{\delta_{-d,r}(L)}$, expresión que coincide inicialmente con el

AP $\left[\frac{(p+a, s+b)}{(-d, r)} \right]_v$ de máximo grado a la serie $v(L) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j L^j$ de acuerdo con

las definiciones dadas en (1) y (2).

Si además $T_{f,g}(\hat{\eta}_j) = 0 \forall a < f < b, \forall g$, se tiene que $v(L) \equiv \frac{\hat{W}_{p+a, s+b}(L)}{\hat{\delta}_{-d,r}(L)}$

siendo “a” el adelanto y “b” el retardo en la repuesta de y_t ante variaciones en x_t .

Asimismo, las propiedades sobre la distribución asintótica de las estimaciones $T_{f,g}(\eta_j)$ en la tabla T son las dadas en Lii (1985) para los elementos de la denominada tabla C en el caso clásico.

Este método constituye no sólo una extensión de la propuesta clásica inicial para la identificación de modelos causales sino incluso, dentro del ámbito de los modelos no causales, se presenta como una alternativa a la utilización de la denominada *aproximación de Padé-Laurent*⁸ debida a Bultheel (1987), propuesta ésta que permite aproximar las dos direcciones de una serie doblemente infinita a través de la representación racional de dos funciones analíticas en cero e infinito, respectivamente.

Por su parte, la caracterización racional obtenida para $v(L)$ de órdenes (p,s,r,d,a,b) se traduce en términos del ε -algoritmo generalizado en una tabla- ε^9 de la forma:

Col	0	...	2(d-1)	2d	...	2(r-1)	2r
...
p+a-1	ε_0^{p+a-1}	...	$\varepsilon_{2(d-1)}^{p+a-d}$	0
p+a	ε_0^{p+a}	...	$\varepsilon_{2(d-1)}^{p+a-d+1}$	ε_{2d}^{p+a-d}
...
a	ε_0^a
a+1	0	...	0	0	...	0	0
...
b-1	0	...	0	0	...	0	0
b	ε_0^b
...
s+b	ε_0^{s+b}	$\varepsilon_{2(r-1)}^{s+b-r+1}$	ε_{2r}^{s+b-r}
s+b+1	ε_0^{s+b+1}	0
...

en la que los valores del adelanto "a" y del retardo "b" en la respuesta del output ante variaciones del input vendrán indicados por el hecho de que:

$$\hat{\eta}_j = 0, \quad j = a + 1, \dots, b - 1$$

Precisamente, esta propuesta constituye la generalización del ε -algoritmo propuesto por González y Cano (1990a,b) y González et al. (1993, 1995a) para la identificación de un modelo FT clásico.

3) *Estimación preliminar de los parámetros del modelo*

Una vez que han sido identificados los órdenes polinomiales correspondientes se realiza la estimación de los parámetros en el AP $\left[\frac{(p+a, s+b)}{(-d, r)} \right]_v$. Con tal propósito, en primer lugar, una vez representada la serie $v(L)$ mediante un modelo racional de la forma $\frac{P_{s+b}(L)}{Q_r(L)}$ se estiman sus parámetros como sigue:

$$\frac{\hat{P}_{s+b}(L)}{\hat{Q}_r(L)} = \frac{\sum_{-\infty}^{s+b} \hat{p}_i L^i}{\sum_0^r \hat{q}_i L^i} = \frac{\sum_{-\infty}^{s+b} \hat{p}_i L^i}{1 + \sum_1^r \hat{q}_i L^i} \quad \hat{p}_i = \frac{\hat{p}_i}{\hat{p}_0}; \quad \hat{q}_i = \frac{\hat{q}_i}{\hat{q}_0}$$

Las distribuciones asintóticas para las estimaciones \hat{p}_i, \hat{q}_i de los parámetros en el AP $\left[\frac{s+b}{r} \right]$ verifican las mismas propiedades que se señalan en Lii (1985) para el AP clásico.

El siguiente paso consiste en representar de forma racional la serie $\sum_{-\infty}^{s+b} \hat{p}_i L^i$.

Para ello y teniendo en cuenta que la serie puede ser expresada como una serie formal de potencias:

$$\sum_{-\infty}^{s+b} \hat{p}_i L^i = L^{s+b} \sum_0^{\infty} \hat{p}_{-i+s+b} L^{-i} = L^{s+b} \sum_0^{\infty} \hat{h}_i L^{-i}$$

el proceso a seguir sería el mismo que el dado para el caso clásico, obteniéndose finalmente el modelo $\frac{\hat{W}_{p+a, s+b}(L)}{\hat{\delta}_{-d, r}(L)}$. Estas estimaciones obtenidas para los parámetros en el AP $\left[\frac{(p+a, s+b)}{(-d, r)} \right]_v$ constituyen valores iniciales fiables para la obtención de un modelo definitivo mediante la utilización de métodos iterativos más eficientes, una vez se incorpora al modelo la identificación de la parte aleatoria.

4. Resultados y conclusiones

Con el objetivo de ilustrar los métodos de identificación propuestos, presentamos los resultados de la simulación realizada para una formulación del modelo FT con $a=-2$, $b=1$, $p=-1$, $s=1$, $r=1$, $d=-1$. Para un tamaño muestral de 114 observaciones, considerando que x_t^* y x_t^{**} sigan o no la misma distribución, se realizaron 200 repeticiones del siguiente modelo:

$$y_t = \frac{(w_{-3}L^{-3} + w_{-2}L^{-2} + w_1L + w_2L^2)}{\delta_{-1}L^{-1} + \delta_0 + \delta_1L} x_t + \varepsilon_t$$

donde, en ambos casos, $\varepsilon_t \sim N(0,4)$ y las estimaciones de los pesos de la FRI se obtienen ajustando y_t en función de x_{t-j} para $j = +10, +9, \dots, -9, -10$.

Caso i) En este primer caso, x_t^* y x_t^{**} siguen la misma distribución con $(1-u_0L)x_t = a_t$, $u_0=0,5$, $a_t \sim N(0,1)$.

Tomando $w_{-3} = 1,25$; $w_{-2} = 0,5$; $w_1 = 0,25$; $w_2 = 1$; $\delta_{-1} = -1$; $\delta_0 = -0,1$; $\delta_1 = 0,3$, los resultados que se obtienen tanto para las tablas T como para las tablas- ε permiten concluir que:

En cuanto a los valores de a y b , éstos se recogen de forma correcta en un elevado número de tablas, si bien manifiesta una cierta infravaloración el parámetro a , cuyos valores se sitúan en el rango $\{-1,-2\}$ y una cierta sobrevaloración el parámetro b , cuyo rango se sitúa en $b \in \{1,2\}$. Los valores s y p de la estructura dinámica se sitúan en el rango $s \in \{1,2\}$ y $p \in \{-1,-2\}$; por su parte, los valores correctos para r y d se recogen en porcentajes muy altos. Las tablas T y tabla- ε de medias de la FRI reproducen correctamente el modelo simulado:

TABLA T

	0	1	2	3	4	5	6	7
-6	1.00	-.05	.00	.00	.00	.00	.00	.00
-5	1.00	.08	.01	.00	.00	.00	.00	.00
-4	1.00	-.03	-.00	-.01	.00	.00	.00	-.01
-3	1.00	.02	-.03	.08	-.05	.02	-.03	.09
-2	1.00	-1.00	1.01	-1.07	1.013	-1.00	1.00	-1.01
-1	1.00	-.37	-.15	.07	-.23	-.56	.56	-.14
0	1.00	-.29	.05	.03	.09	-.44	.23	-.02
1	1.00	-.09	-.07	-.05	-.09	-.31	.09	.07
2	1.00	-.28	.01	-.14	-.08	-.23	.13	-.02
3	1.00	-.74	.53	-.39	.29	-.21	.15	-.10
4	1.00	-.03	-.18	-.00	.00	-.01	-.00	-.00
5	1.00	-.25	.06	-.00	.00	.00	.00	.00
6	1.00	.01	-.02	-.00	.00	.00	.00	.00

TABLA-ε

	0	2	4	6	8	10	12	14	16
-10	.020								
-9	.101	.049							
-8	-.044	.005	-.033						
-7	.030	-.010	-.004	.012					
-6	-.055	-.002	-.016	.006	.013				
-5	.083	.021	.013	-.011	-.004	-.035			
-4	-.032	.006	.021	-.004	.009	.005	.058		
-3	.024	-.029	.093	-.041	.020	-.027	.0106	.042	
-2	-1.000	-.609	-.472	-.371	.332	-.363	-.325	-.307	-.291
-1	-.368	-.274	.647	-.291	.348	-.345	-.289	1.632	-.317
0	-.286	-.425	-.148	-.551	-.344	-.349	-.193	-.299	-.343
1	-.090	-.186	-.284	-.264	-.325	-.402	-.376	-.372	-1.902
2	-.279	.045	-.265	-.280	-.306	-.372	-.371	-.376	.496
3	-.737	-.459	-.352	-.310	-.293	-.371	-.372	-.393	
4	-.028	-.196	-.004	.024	-.053	-.037	-.017		
5	-.248	-.129	.026	.002	-.041	-.132			
6	.011	-.052	-.041	-.035	-.030				
7	-.073	-.044	-.025	.119					
8	-.028	-.036	.035						
9	-.038	-.033							
10	-.036								

Caso ii) En este caso, x_t^* y x_t^{**} siguen distribuciones diferentes con

$$(1-0,5L)x_t^* = a_t^* \sim N(0,1) \text{ y } (1-0,75L)x_t^{**} = a_t^{**} \sim N(0,2)$$

Los resultados que se obtienen sobre los valores de la estructura dinámica en las tablas T y tablas-ε permiten hacer comentarios análogos a los del caso anterior. Las tablas de medias que se obtienen reproducen nuevamente el modelo correcto:

Tabla T

	0	1	2	3	4	5	6	7
-6	1.000	.01	.00	.00	.00	.00	.00	.00
-5	1.00	.01	.00	.00	.00	.00	.00	.00
-4	1.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00
-3	1.00	-.01	.00	-.01	.01	-.03	.05	-.00
-2	1.00	-1.00	.99	-.98	.97	-.96	.93	-.88
-1	1.00	.60	.38	-.25	-.09	-.56	.67	-.83
0	1.00	.02	-.01	-.10	-.13	-.39	-.02	-.11
1	1.00	-.01	.01	-.04	.22	-.27	-.07	-.03
2	1.00	-.26	.06	.00	-.29	-.22	.12	-.13
3	1.00	-.78	.60	-.48	.38	-.31	.24	-.19
4	1.00	-.03	-.17	.01	.01	-.02	-.03	.00
5	1.00	-.21	.05	-.01	.00	-.00	.00	-.00
6	1.00	.03	-.01	-.00	.00	.00	.00	.00

Tabla-ε

	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
-10	-.023									
-9	.003	-.063								
-8	.047	.019	.008							
-7	-.032	-.003	-.002	-.002						
-6	.013	-.001	-.002	-.002	-.002					
-5	-.008	-.002	-.001	-.002	-.002	.009				
-4	-.000	-.005	-.002	-.001	-.003	.020	-.030			
-3	-.015	.000	-.009	.015	-.031	.061	-.001	-.020		
-2	-1.00	-.714	-.460	-.370	-.319	-.334	-.280	-.313	-.257	
-1	-.597	-1.75	-.262	-.195	-.330	-.322	-.299	-.290	-.257	-.257
0	.023	-.009	-.211	-.255	-.304	-.141	-.252	-.314	-.336	.135
1	-.010	.028	.292	-.323	-.289	-.245	-.182	-.328	-.307	1.82
2	-.262	.228	-.000	-.261	-.272	-.305	-.301	-.388	-.383	
3	-.779	-.472	-.348	-.275	-.264	-.301	-.304	-.383		
4	-.025	-.176	.035	.052	-.065	-.090	.025			
5	-.214	-.108	.053	.037	-.103	-.071				
6	.026	-.021	-.036	.066	-.022					
7	-.033	-.049	.005	-.044						
8	-.045	-.026	-.066							
9	-.084	-.056								
10	.016									

En definitiva, los resultados obtenidos ponen de manifiesto la operatividad de ambos métodos de caracterización racional como alternativas válidas en el proceso de identificación dinámica así como la posibilidad de extender los conceptos básicos al caso de modelos multivariantes. Además, permiten corroborar, de forma análoga a como se recoge en González et al. (1993) para el caso clásico, la superioridad por su sencillez computacional del ϵ -algoritmo generalizado -en el que el cálculo operacional se reduce a considerar sumas y cocientes- sobre el método de la tabla T o método coner generalizado que, sin embargo, requiere en la práctica del cálculo de determinantes de matrices de orden cada vez mayor.

Por su parte, el estudio estadístico de la significación relativa de los elementos asociados a las tablas en ambos métodos, como elemento indispensable para asegurar la adecuación de la especificación dinámica elegida, puede llevarse a cabo tal y como se indica en Lii (1985).

Es importante resaltar que la propuesta metodológica aquí expuesta se sitúa en el campo de la matemática aplicada al análisis de series temporales y, por tanto, su alcance va más allá del contexto de los modelos de FT. Sin embargo, la ventaja de la presentación realizada se centra en que establece los cimientos para la construcción

de otros métodos alternativos a los aquí estudiados. Además, permite contemplar el caso clásico como caso particular de dicha propuesta cuando no se introducen las expectativas en el modelo.

En cuanto a posibles líneas de investigación futura, una cuestión que desde el punto de vista teórico se presenta directamente vinculada con este estudio es la generalización del marco dinámico de referencia, esto es, del modelo FT para la inclusión de múltiples inputs/outputs y a modelos VARMA en general, así como la generalización de los procedimientos de identificación dinámica hasta ahora descritos para el caso escalar.

Por otra parte, a nivel empírico, nuestro interés por aplicar la metodología propuesta al estudio de datos reales, que permitan verificar la bondad de los desarrollos teóricos expuestos, nos ha llevado a realizar algunas experiencias en esta dirección¹⁰. En particular, las características de esta metodología la hacen especialmente adecuada para abordar, por un lado, la modelización de relaciones dinámicas entre variables sujetas a comportamientos estructuralmente diferentes en el tiempo y , por otro lado, para realizar análisis de sensibilidad que, mediante la incorporación de expectativas formuladas de modo "ex ante", permitan contrastar la validez y efectividad de diferentes especificaciones dinámicas y con ello lograr la determinación de un modelo óptimo.

Es por ello que resulta necesario seguir extendiendo las aplicaciones de la metodología propuesta al estudio de datos reales en aquellas áreas donde la formación de expectativas sobre el comportamiento de ciertas variables resulta relevante en la toma de decisiones intertemporales de los agentes económicos como es el caso, entre otros, de los mercados agrícolas y financieros.

Notas

1. Véase, entre otros, Beguin et al. (1980), Lii (1985), Tiao y Tsay (1989), Claverie et al (1990), Berlinef y Franca (1994).
2. Este método fue propuesto por Liu y Hanssens (1982) para la identificación de un modelo FT clásico a partir del trabajo de Beguin et al. (1980) para la identificación de modelos ARMA.
3. Este método iterativo ha sido propuesto por Berlinef (1984a,b) para la identificación de modelos ARMA univariantes y multivariantes, estudiado por González y Cano (1990a,b) para la determinación de un modelo FT clásico y extendido al caso, también clásico, de múltiples inputs por González et al. (1993, 1995a).
4. Véase Gantmacher (1974), Baker (1975) y Bultheel (1987).
5. La relación entre los elementos $C_{j,m}(c_i)$ de la tabla C, y los de la tabla T viene dada por la expresión:

$$C_{j,m}(c_i) = (-1)^{M(M-1)/2} T_{j,m}(c_i)$$

6. Ver Brezinski (1980) para más detalles sobre este procedimiento y su obtención a partir de la denominada regla de la cruz entre cinco AP adyacentes.

7. Obsérvese que dicha representación es equivalente a:

$$y_t = \frac{W_{q+p+a, q+s+b}(L)}{\delta_{q-d, q+r}(L)} x_t + N_t$$

donde, en particular, para $q=d$ se obtiene un modelo en el que no comparecen valores futuros del output:

$$y_t = \frac{W_{p+a, s+b}(L)}{\delta_{-d, r}(L)} x_t + N_t \equiv \frac{W_{p+a+d, s+b+d}(L)}{\delta_{0, r+d}(L)} x_t + N_t$$

8. Véase González y Gil (1993) para un estudio de esta variante y de sus aplicaciones en el contexto de modelos FT.

9. El estudio de la significación de los elementos en la tabla-ε se lleva a cabo de la forma presentada en Berliney y Francq (1994) para modelos ARMA y en González et al. (1995a) para modelos FT en el caso clásico.

10. Véase González et al. (1995b) y Gil et al. (1996).

Bibliografía

BAKER, G.A. Jr. (1975): *Essentials of Padé Approximants*. Academic Press. New York.

BAKER, G.A., jr. y GRAVES-MORRIS, P. (1996): *Padé Approximants. Encyclopedia of Mathematics and its Applications* 59. Cambridge University Press. 2nd Edition.

BEGUIN, J.M., GOURIEROUX, C. y MONFORT, A. (1980): "Identification of a Mixed Autoregressive-Moving Average Process: The Corner Method" in *Time Series*. O.D. Anderson, Ed., North-Holland, Amsterdam, pp. 423-436.

BERLINET, A. (1984a): *Sur quelques problèmes d'estimation fonctionnelle et de statistique procesus*. Thèse. Université des Sciences et Techniques de Lille. France

----- (1984b): "Estimating the Degrees of an ARMA Model". *Compmat Lect.*, 3, pp. 61-94.

BERLINET, A. y FRANCO, C. (1994): "Identification of a Univariate ARMA Model". *Computational Statistics*, 9, pp.117-133.

BOX, G.E.P. y JENKINS, G.M (1976): *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Revised Edition. Holden Day. San Francisco.

BREZINSKI, C. (1980): *Padé-type Approximations and General Orthogonal Polynomials*. Birkhäuser, Basel.

BULTHEEL, A. (1987): *Laurent Series and their Padé Approximations*. Birkhäuser, Basel/Boston.

CLAVERIE, P., SZPIRO, D. y TOPOL, R. (1990): "Identification des Modèles à Fonction de Transfert: La Méthode Padé-Transformée en z". *Annales D'Economie et de Statistique*, 17, pp. 145-161.

GANTMACHER, F.R. (1974): *Matrix theory*. Vol. II, Chelsea Publishing Company.

- GIL, M. (1995): *Propuesta Metodológica en el Contexto de Modelos de Función de Transferencia con Expectativas*. Tesis doctoral. Universidad de La Laguna. España.
- GIL, C., GONZÁLEZ, C. Y PESTANO, C. (1996): "Modelización de la Relación Publicidad-Ventas a través de la Aproximación de Padé". *Actas de la IX Reunión ASEPELT-España*, vol V, pp. 261-270. Universidad de Santiago de Compostela.
- GONZÁLEZ, C. y CANO, V. (1990a): "Determinación de los Órdenes de los Polinomios de Retardo en una Función de Transferencia: Comparación de Algoritmos". *Revista de la Academia Canaria de Ciencias*, 1, pp. 173-183.
- (1990b): "Especificación de una Función de Transferencia Bajo Limitación en el Comportamiento de la Variable Dependiente". *Actas de la IV Reunión Anual de ASEPELT-España*. Murcia.
- GONZÁLEZ, C., CANO, V. y GIL, C. (1993): "Comparación de Algoritmos para la Identificación de una Función de Transferencia: Una Generalización al Caso de Varios Inputs". *Revista Española de Economía*, 10, 1, pp. 163-175.
- (1995a): "The ϵ -algorithm for the Identification of a Transfer Function Model: Some Applications". *Numerical Algorithms*, 9, pp. 379-395.
- GONZÁLEZ, C. Y GIL, C. (1993): "La Aproximación de Padé-Laurent en la determinación de un Modelo de Función de Transferencia con Expectativas". *Estudios de Economía Aplicada*, vol. 1, pp. 185-194. Universidad de Cádiz.
- GONZÁLEZ, C., GIL, C. y STARZYNSKA, W. (1995b): "A Rational Model for Economies in a State of Transition: The Case of Poland", pp. 51-73. Fundacja na Rzecz Restrukturyzacji Regionu Łódzkiego. Lodz. Polonia.
- LII, K. (1985): "Transfer Function Model Order and Parameter Estimation". *Journal of Time Series Analysis*, 6, 3, pp. 153-169.
- LIU, L.M. y HANSSENS, D. (1982): "Identification of Multiple Inputs Transfer Function Models". *Communications in Statistics A 11*, pp. 297-314.
- PADÉ, H. (1892): "Sur la Représentation Approchée d'une Fonction par des Fractions Rationnelles". *Ann. Ec. Norm. Sup.*, 9.
- TIAO, G. C. y TSAY, R.S. (1989): "Model Specification in Multivariate Time Series". *Journal of the Royal Statistical Society. Series. B*, 51, pp. 157-213.
- WYNN, P. (1956): "On a Device for Computing the $e_m(s_n)$ Transformation". *MTAC* 10, pp. 91-96.

APÉNDICE

LA APROXIMACIÓN DE PADÉ (AP) A UNA SERIE FORMAL DE LAURENT

* **Definición 1 (Bultheel, 1987).**-

Sea $F(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_j z^j$ la serie formal de Laurent asociada a la sucesión doblemente infinita $\{c_j\}_{-\infty}^{\infty}$, se denomina AP $\left[\frac{J}{M} \right]_F$ ($J \in \mathbb{Z}, M \in \mathbb{N}$) para $F(z)$ a la función racional $\frac{P_J(z)}{Q_M(z)}$ donde $P_J(z)$ es una serie formal de Laurent y $Q_M(z)$ un polinomio clásico dados por:

$$P_J(z) = \sum_{-\infty}^J p_j z^j \quad (J = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad Q_M(z) = \sum_0^M q_k z^k \quad (M = 0, 1, 2, \dots)$$

tales que verifican la condición:

$$F(z)Q_M(z) - P_J(z) = O_+(z^{J+M+1}) \tag{A.1}$$

La formulación linealizada del AP $\left[\frac{J}{M} \right]_F$ a la serie $F(z)$ dada en (A.1) permite obtener las siguientes ecuaciones de Padé:

$$\sum_{k=0}^M c_{j-k} q_k = r_j \quad (j = \dots, i-M, \dots, i, \dots, J, J+1, \dots, J+M)$$

$$r_j = \begin{cases} p_j & -\infty < j \leq J \\ 0 & J < j \leq J+M \end{cases}$$

que determinan los coeficientes del denominador $q_k (k=0, \dots, M)$ y del numerador $p_k (k=\dots, J-1, J)$ del AP; los coeficientes r_j para $j=J+M+1, J+M+2, \dots$ están dados por la expresión:

$$\sum_{k=0}^M c_{j-k} q_k = r_j \quad j = J+M+1, J+M+2, \dots$$

En concreto, el conjunto de ecuaciones descrito por:

$$\sum_{k=0}^M c_{j-k} q_k = p_j \quad j = \dots, J-2, J-1, J$$

permite determinar los coeficientes de la serie $P_f(z)$ una vez calculados los de $Q_M(z)$, que a su vez, tomando $q_0=1$ como condición de normalización, serán solución del sistema dado por:

$$\sum_{j=1}^M c_{k-j} q_j = -c_k \quad k = J+1, \dots, J+M$$

* **Teorema 1 (Bultheel, 1987).**- Sea

$$T_{f,g}(c_i) \equiv \begin{vmatrix} c_f & \dots & c_{f+g-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{f-g+1} & \dots & c_f \end{vmatrix} = \det[(c_{f+k-j})_{k,j=1}^g]$$

el AP $\left[\frac{J}{M} \right]_F$ existe y estará únicamente determinado si y sólo si $T_{J,M}(c_i) \neq 0$.

* **Definición 2 (Bultheel, 1987).**- Denominamos *tabla T* a la matriz infinita $T \equiv (T_{f,g})_{\substack{g=0,L,\infty \\ f=-\infty,L,\infty}}$ que representamos por:

$$\begin{array}{cccccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{-2,0} & T_{-2,1} & T_{-2,2} & T_{-2,3} & \dots & \dots \\ T_{-1,0} & T_{-1,1} & T_{-1,2} & T_{-1,3} & \dots & \dots \\ T_{0,0} & T_{0,1} & T_{0,2} & T_{0,3} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

donde $T_{f,0}(c_i) = 1$, $T_{f,1}(c_i) = c_i$.

* **Teorema 2 (Bultheel, 1987).**- Los elementos nulos en la tabla $T \equiv (T_{f,g})$ para una

serie formal de Laurent $F(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_i z^i$ forman bloques cuadrados bordeados por

elementos no nulos.

La formalización de esta estructura de bloques en la tabla T se recoge de forma más completa en el siguiente teorema:

* **Teorema 3 (Bultheel, 1987).**- Sea $F(z)$ una serie formal de Laurent no nula tal

que $F(z) = \sum_{i=K^+}^{K^-} c_i z^i$ (K^+, K^- pueden ser infinito). Sea $S(z) = (B(z), Q(z), P(z), R(z))$ la so-

lución reducida y única -por la condición de normalización elegida para $Q(z)$ - del conjunto de ecuaciones dado por:

$$\begin{aligned} P_J(z) &= \sum_{i=-\infty}^J \text{término grado } i \text{ de } (F(z)Q_M(z)) \\ \sum_{i=J+1}^{J+M} \text{término grado } i \text{ de } (F(z)Q_M(z)) &= 0 \\ R_{J,M}(z) &= \sum_{i=J+1}^{\infty} \text{término grado } i \text{ de } (F(z)Q_M(z)) \\ B_{J,M}(z) &= \sum_{i=\min(0, J+M+1)}^{\max(J, M)} \text{término grado } i \text{ de } (Z(z)Q_M(z)) \end{aligned} \tag{A.2}$$

con $Z(z) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i z^i$ para algún valor de $M \geq 0$ y $K^+ \leq J \leq K^-$.

Sea $Q(z) = \sum_0^U q_i z^i$, $P(z) = \sum_{-\infty}^K p_i z^i$, $R(z) = \sum_{\hat{K}+U+1}^{\infty} r_i z^i$. Definiendo $h = \hat{K} - K$ se tiene que:

a) $h \geq 0$.

b) $S(z) = (B(z), Q(z), P(z), R(z))$ es solución reducida del conjunto de ecuaciones (A.2) si y sólo si

$$K \leq J \leq \hat{K} \text{ y } U \leq M \leq U + h \tag{A.3}$$

c) $\forall (J, M)$ que satisfaga la expresión (A.3), $S_{J,M}(z) = (B_{J,M}(z), Q_M(z), P_J(z), R_{J,M}(z))$ es una solución de (A.2) si y sólo si $S_{J,M}(z) = z^{\lambda_M^J} D(z)S(z)$ con

$$\begin{aligned} \lambda_M^J &= \max\{0, (J - K) + (M - U) - h\} \text{ si } K > -\infty \\ &= \max\{0, (J - \hat{K}) + (M - U)\} \text{ si } \hat{K} < \infty \end{aligned}$$

y $D(z)$ es un polinomio no nulo de grado máximo dado por

$$\delta_M^{(J)} = M - \text{rango} \left[f_{J+i-j} \right]_{j=0, \dots, M}^{i=0, \dots, M}$$

d) A partir de la definición de los determinantes de Toeplitz $T_{J,M}(c_i) = \det [c_{J+k-j}]_{k,j=1}^M$, las propiedades que verifica la tabla T asociada a la solución reducida del sistema serán:

$$\begin{aligned}
 T_{J,U}(c_i) &\neq 0, & K \leq J \leq \hat{K} \\
 T_{K,M}(c_i) &\neq 0, & U \leq M \leq U+h \text{ si } K > -\infty \\
 T_{\hat{K}+1,M}(c_i) &\neq 0 & U \leq M \leq U+h \text{ si } \hat{K} < \infty \\
 T_{J,U+h+1}(c_i) &\neq 0 & K \leq J \leq \hat{K} \text{ si } h < \infty \\
 T_{J,M}(c_i) &= 0 & K < J \leq \hat{K} \text{ y } U < M \leq U+h
 \end{aligned}$$

Estas propiedades se traducen en la aparición en la tabla T de una estructura de bloques de tamaño h formados por elementos nulos.

Este teorema no es sino la generalización del teorema dado en Baker (1975) para la caracterización de la estructura de bloques en una serie formal de potencias,

esto es, $F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$. Así, teniendo en cuenta que este resultado puede ser ge-

neralizado a los casos en que $F(z) = \sum_{K^+}^{\infty} c_i z^i$ ($K^+ > -\infty$) o $F(z) = \sum_{-\infty}^{K^-} c_i z^i$ ($K^- < \infty$) (con

la transformación $z \rightarrow \frac{1}{z}$), la estructura de bloques que se describe en la tabla T es

en realidad la descrita en Baker excepto para las filas anteriores a K^+ y posteriores a K^- , respectivamente.

Los valores K, \hat{K}, U y h están relacionados con la solución única y reducida del sistema (A.2) con lo cual, para una serie $F(z)$ dada dependen sólo de los valores J y M . Teniendo en cuenta que cualquier determinante $T_{J,M}(c_i)$ no nulo sólo puede existir en la región $K^+ \leq J \leq K^-$ y $M \geq 0$, entonces podemos definir:

$$\begin{array}{lll}
 U_M^{(J)} = 0 & \text{si } J < K^+ \text{ o } J > K^- & K_M^{(J)} = -\infty \quad \text{si } J < K^+ \\
 = U & \text{en otro caso} & = K^- \quad \text{si } J > K^- \\
 & & = K \quad \text{en otro caso} \\
 h_M^{(J)} = \infty & \text{si } J < K^+ \text{ o } J > K^- & K_M^{(J)} = K^+ - 1 \quad \text{si } J < K^+ \\
 = h & \text{en otro caso} & = \infty \quad \text{si } J > K^- \\
 & & = \hat{K} \quad \text{en otro caso}
 \end{array}$$

La aparición en la tabla T de una estructura de bloques de tamaño infinito, esto es, $h_M^{(j)} = \infty$ vendrá dada si y sólo si $K_M^{(j)} = -\infty$ o $\hat{K}_M^{(j)} = \infty$. Además, podemos definir $\hat{K}_M^{(j)} = K_M^{(j)} + h_M^{(j)}$ si $j \geq K^+$ y $K_M^{(j)} = \hat{K}_M^j - h_M^{(j)}$ si $j \leq K$.

Si se generalizan las propiedades dadas en este teorema 3 para los determinantes $T_{j,m}(c_i)$ asociados a la solución reducida del sistema de ecuaciones (A.2) para todo valor de h, se establece una condición análoga a la dada en el caso clásico para representar la serie de Laurent F(z) mediante un modelo racional.

* **Teorema 4 (Gil, 1995).**- Dada la serie formal de Laurent F(z), las tres condiciones siguientes son equivalentes:

$$1) F(z) = \frac{\sum_{i=-\infty}^K p_i z^i}{1 + \sum_{i=1}^U q_i z^i} \quad K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; U = 0, 1, 2, \dots$$

$$2) \left[\frac{J}{M} \right]_F = F(z) \quad \forall J \geq K, \forall M \geq U \tag{A.4}$$

$$3) T_{K,U}(c_i) \neq 0; \quad T_{j,m}(c_i) = 0 \quad \forall j > K, \forall m > U$$

Dado que la serie formal de Laurent $P_K(z) = \sum_{i=-\infty}^K p_i z^i$ puede ser considerada una

serie formal de potencias en z^{-1} y converge en el exterior de un círculo centrado en el origen, partiendo de la teoría del caso clásico podemos dar el siguiente resultado:

* **Teorema 5 (Gil, 1995).**- La serie formal de Laurent

$$P_K(z) = \sum_{-K}^{\infty} p_{-i} z^{-i} \quad (K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \text{ considerada como una serie de potencias en } z^{-1},$$

tendrá una representación racional de la forma:

$$P_K(z) = \frac{A_{H,K}(z)}{Q_{-N}(z)} = \frac{\sum_{-K}^{-H} a_{-i} z^{-i}}{\sum_0^N q_i z^{-i}}$$

si y sólo si los AP $\left[\frac{(-J)}{M} \right]_{P_K} = P_K(z) \quad \forall J \leq H \quad (-J \geq -H), M \geq N$ con $T_{H,N}(p_i) \neq 0$ o, equivalentemente, $T_{J,M}(p_i) = 0 \quad \forall J < H \quad (-J > -H), M > N$.

A partir de las propiedades que verifican los determinantes $T_{J,M}(c_i)$ en la tabla T asociada a $F(z)$ resulta posible determinar las condiciones dadas en el teorema anterior a fin de obtener una representación de orden finito para la serie $P_K(z)$.

En este sentido, el resultado que a continuación se muestra resulta fundamental para la caracterización de una serie de Laurent a través de un modelo racional de órdenes finitos.

* **Teorema 6 (Gil, 1995).**- La serie $P_K(z)$ admite una representación racional de la

$$\text{forma } P_K(z) = \frac{A_{H,K}(z)}{Q_{-N}(z)} \text{ si y sólo si } T_{J,M}(c_i) = 0 \quad \forall J < H, (-J > -H), M > N.$$

Demostración: " \Leftarrow "

Desde (A.1) se tiene que:

$$p_j = \sum_{k=0}^M c_{j-k} q_k \quad (j = -\infty, \dots, K)$$

$$p_j = 0, \quad j > K$$

Por tanto,

$$T_{j,M}(p_i) = \begin{vmatrix} p_j & \dots & p_{j-M+1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ p_{j+M-1} & \dots & p_j \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_j + c_{j-1}q_1 + \dots + c_{j-M}q_M & \dots & c_{j-M+1} + \dots + c_{j-2M+1}q_M \\ \vdots & \dots & \vdots \\ c_{j+M-1} + \dots + c_{j-1}q_M & \dots & c_j + \dots + c_{j-M}q_M \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_j & c_{j-1} + \dots + c_{j-M-1}q_M & \dots & c_{j-M+1} + \dots + c_{j-2M+1}q_M \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{j+M-1} & c_{j+M-2} + \dots + c_{j-2}q_M & \dots & c_j + \dots + c_{j-M}q_M \end{vmatrix} +$$

$$+ q_1 \begin{vmatrix} c_{j-1} & c_{j-1} + \dots + c_{j-M-1}q_M & \dots & c_{j-M+1} + \dots + c_{j-2M+1}q_M \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{j+M-2} & c_{j+M-2} + \dots + c_{j-2}q_M & \dots & c_j + \dots + c_{j-M}q_M \end{vmatrix} +$$

$$+ \dots + q_M \begin{vmatrix} c_{j-M} & c_{j-1} + \dots + c_{j-M-1}q_M & \dots & c_{j-M+1} + \dots + c_{j-2M+1}q_M \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{j-1} & c_{j+M-2} + \dots + c_{j-2}q_M & \dots & c_j + \dots + c_{j-M}q_M \end{vmatrix}$$

El desarrollo recursivo de estos $M+1$ determinantes de tamaño M permite obtener, a través de un proceso iterativo, una suma de $(M+1)^M$ determinantes cuyas M columnas forman parte de la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} c_j & c_{j-1} & \dots & c_{j-M+1} & c_{j-M} & \dots & c_{j-2M+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{j+M-1} & c_{j+M-2} & \dots & c_j & c_{j-1} & \dots & c_{j-M} \end{pmatrix}$$

Así pues, en el caso en que:

$$T_{J,M}(c_i) = \begin{vmatrix} c_J & \cdots & c_{J-M+1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{J+M-1} & \cdots & c_J \end{vmatrix}, \quad T_{J-1,M}(c_i) = \begin{vmatrix} c_{J-1} & \cdots & c_{J-M} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{J+M-2} & \cdots & c_{J-1} \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$T_{J-M,M}(c_i) = \begin{vmatrix} c_{J-M} & \cdots & c_{J-2M+1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{J-1} & \cdots & c_{J-M} \end{vmatrix}.$$

son nulos, cualquier determinante cuyas M columnas formen parte de la matriz A será nulo debido a que el rango de A es menor que M . Observar que cada columna de la matriz A es combinación lineal de las $M-1$ columnas anteriores a ella. Por tanto, podemos concluir que:

Si $T_{J,M}(c_i) = 0 \quad \forall J < H, \forall M > N$ entonces $T_{J,M}(p_i) = 0 \quad \forall J < H, \forall M > N$ y por el teorema anterior $P_K(z)$ tiene la estructura indicada.

" \Rightarrow "

Si $P_K(z) = \frac{A_{H,K}(z)}{Q_{-N}(z)}$, aplicando (A.4) para $F(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_{-j} z^{-j}$ se deduce que:

$$T_{J,M}(c_i) = 0 \quad \forall J < H, \forall M > N.$$

* **Corolario.-**

$$\begin{array}{ccc} T_{J,M}(c_i) = 0 \quad \forall J < H & & T_{J,M}(p_i) = 0 \quad \forall J < H \\ & \Leftrightarrow & \\ & & \forall M > N \end{array}$$

A partir de las definiciones de AP para una serie formal de potencias (Baker y Graves-Morris, vol I, 1981) y de su extensión al estudio de series formales de Laurent (Bultheel, 1987) podemos dar la siguiente definición:

* **Definición 3 (Gil, 1995).**- Dados $H, K \in \mathbb{Z}$ y $N, U \in \mathbb{N}$ el AP a la serie formal de

Laurent $F(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i z^i$ ($c_i, z \in \mathbb{C}$), se domina AP $\left[\begin{smallmatrix} (H, K) \\ (-N, U) \end{smallmatrix} \right]_F$ a la función racional

$$\frac{A_{H,K}(z)}{Q_{-N,U}(z)} \text{ donde}$$

$$A_{H,K}(z) = \sum_{i=H}^K a_i z^i ; \quad Q_{-N,U}(z) = Q_{-N}(z)Q_U(z) = \left(\sum_{i=-N}^0 q_i z^i \right) \left(\sum_{i=0}^U q_i z^i \right)$$

tal que existe una serie formal $P_K(z) = \sum_{i=-\infty}^K p_i z^i$ ($K=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) para la cual se verifica que:

$$F(z)Q_U(z) - P_K(z) = O_+(z^{K+U+1}) \quad \text{y} \quad P_K(z)Q_{-N}(z) - A_{H,K}(z) = O_-(z^{-(N-H+1)})$$

es decir, $\frac{P_K(z)}{Q_U(z)}$ es el AP $\left[\begin{smallmatrix} K \\ U \end{smallmatrix} \right]_F(z)$ y $\frac{A_{H,K}(z)}{Q_{-N}(z)}$ es el AP $\left[\begin{smallmatrix} -H \\ N \end{smallmatrix} \right]_{P_K}(z^{-1})$.

* **Teorema 7 (Gil, 1995).**- Sea

$$T_{f,g}(c_i) = \det \left[(c_{f+k-j})_{k,j=1}^g \right]$$

el AP $\left[\begin{smallmatrix} (H, K) \\ (-N, U) \end{smallmatrix} \right]_F$ estará bien definido si y sólo si $T_{H,N}(c_i) \neq 0$ y $T_{K,U}(c_i) \neq 0$.

Partiendo de los Teoremas 4 y 5, una caracterización racional de órdenes finitos para $F(z)$ se da en el siguiente resultado:

* **Teorema 8 (Gil, 1995).**- Dada la serie formal de Laurent $F(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i z^i$ las tres

condiciones siguientes son equivalentes:

$$a) \quad F(z) = \frac{\sum_{i=H}^K a_i z^i}{(1 + \sum_{i=1}^N q_{-i} z^{-i})(1 + \sum_{i=1}^U q_i z^i)}$$

$$b) \quad \left[\begin{smallmatrix} (h, k) \\ (-n, u) \end{smallmatrix} \right]_F = F(z), \quad \forall h \leq H, \forall n \geq N, \forall k \geq K, \forall u \geq U$$

$$c) T_{H,N}(c_i) \neq 0, T_{K,U}(c_i) \neq 0; T_{J,M}(c_i) = 0 \quad \forall J < H \wedge M > N; \quad T_{J,M}(c_i) = 0 \quad \forall J > K \wedge M > U$$

Una segunda alternativa para la identificación de modelos racionales se obtiene a través del ε -algoritmo, un algoritmo recursivo, relacionado con la teoría de Padé y definido como sigue:

*** Formulación del ε -algoritmo (Brezinski, 1980).-**

Sea $\varepsilon_{2k}^n = \left[\frac{n+k}{k} \right]_F(z)$ para un valor fijo de z . Partiendo de la regla de la cruz entre

cinco AP adyacentes¹ y definiendo los elementos ε_{2k+1}^n de manera adecuada, podemos relacionar los números ε_k^n mediante el siguiente procedimiento iterativo:

$$\forall k, n \in \mathbb{Z} \quad \varepsilon_{k+1}^n = \varepsilon_{k-1}^{n+1} + \frac{1}{\varepsilon_k^{n+1} - \varepsilon_k^n} \quad ; \quad \varepsilon_{-1}^n = 0$$

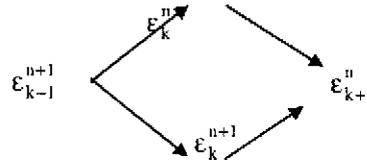
*** Definición 4 (Brezinski, 1980).-** Denominamos *tabla ε* a la matriz infinita formada por los elementos ε_k^n , que representamos por:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \dots & & \\
 & & & & \varepsilon_n^{-1} & & \dots \\
 & & & & & & \dots \\
 \varepsilon_{-1}^0 & & & & \varepsilon_1^{-1} & & \dots \\
 & & & & \varepsilon_n^0 & & \varepsilon_1^{-1} \\
 \varepsilon_{-1}^1 & & & & \varepsilon_1^0 & & \dots \\
 & & & & \varepsilon_n^1 & & \varepsilon_1^0 \\
 \varepsilon_{-1}^2 & & & & \varepsilon_1^1 & & \dots \\
 & & & & \varepsilon_n^2 & & \dots \\
 \varepsilon_{-1}^3 & & & & \dots & & \\
 \dots & & & & & &
 \end{array}$$

en la cual el índice inferior de cada elemento representa la columna que éste ocupa y el superior denota la diagonal.

¹Ver Brezinski (1980, caps. 2 y 3) para una demostración directa de la regla de la cruz a través de la teoría de polinomios ortogonales.

Nótese que el algoritmo iterativo que define este procedimiento relaciona los cuatro elementos situados en los vértices de un rombo, esto es,



de tal forma que la tabla- ϵ puede ser determinada de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha.

En concreto, la generalización del ϵ -algoritmo², a través de la transformación de Shanks entre los números ϵ_k^n y los determinantes de Toeplitz asociados a la sucesión $(c) \equiv (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ bajo las condiciones iniciales:

$$\epsilon_{-1}^n = 0 \quad \text{y} \quad \epsilon_0^n = c_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

permite obtener la siguiente caracterización racional para la serie de Laurent $F(z)$.

* **Teorema 9 (Gil, 1995).**- Dada la serie formal de Laurent $F(z)$ las siguientes condiciones son equivalentes:

$$1) F(z) = \frac{\sum_{i=H}^K a_i z^i}{(1 + \sum_{i=1}^N q_{-i} z^{-i})(1 + \sum_{i=1}^U q_i z^i)}$$

$$2) \begin{aligned} \epsilon_{2U}^{K-U}(c_i) &\neq 0, & \epsilon_{2U}^j(c_i) &= 0 \quad \forall j > K - U \\ \epsilon_{2N}^{H-N}(c_i) &\neq 0, & \epsilon_{2N}^j(c_i) &= 0 \quad \forall j < H - N \end{aligned}$$

²Ver Wynn (1956), Brezinski y Redivo Zaglia (1991).