Estudios de Economía Aplicada
Nº 8, 1997. Págs. 25-40

Problemas de gran tamaño en el Proceso Analítico Jerárquico

ESCOBAR URMENETA, MARÍA TERESA
MORENO JIMÉNEZ, JOSÉ MARÍA
Departamento de Métodos Estadísticos, Facultad de Económicas
Universidad de Zaragoza

Esta versión incluye todas las correcciones sugeridas por el evaluador, las cuales nos han parecido oportunas y por las que les quedamos muy agradecidos.

RESUMEN

La riqueza que presenta la utilización de medidas relativas en el Proceso Analítico Jerárquico (AHP) lleva asociada una limitación en cuanto al tamaño del problema considerado, esto es, al número de alternativas o elementos comparados (Miller, 1956). Este inconveniente hace necesario la búsqueda de procedimientos que permitan garantizar las ventajas de los medidas relativas en problemas de gran tamaño. En este sentido, se proponen dos nuevos procedimientos, basados en la composición de conglomerados, que permiten obtener las prioridades de un conjunto grande de alternativas utilizando medidas relativas. Para ambos métodos se ha obtenido una medida de la inconsistencia utilizando una idea similar a la seguida por Harker para matrices incompletas. Concluye el trabajo comparando los dos procedimientos propuestos en un caso simplificado del Plan Nacional de Regadíos.

Palabras y frases clave: Proceso Analítico Jerárquico, Medidas Absolutas, Medidas Relativas, Conglomerados, Homogeneidad, Matrices Incompletas.
Clasificación AMS: 90A05, 90B50, 90C31

ABSTRACT

The power which presents the utilisation of relative measures in the Analytic Hierarchy Process (AHP) carries a limitation in the size of the problem considered, that is, in the number of alternatives or elements compared (Miller, 1956). This drawback makes it necessary to search for new procedures which allow one to assure the advantages of relatives measures when comparing a large number of alternatives. In this sense, we propose two new methods based on the composition of conglomerates, which allow one to obtain the priorities of a large set of alternatives using relative measures. For both methods, a consistency measure has been obtained based on a similar idea to that used by Harker for incomplete matrices. The paper ends by comparing the two procedures proposed in a simplified case of the Spanish Irrigation Plan.

Key words: Analytic Hierarchy Process, Absolute Measures, Relative Measures, Conglomerates, Homogeneity, Incomplete Matrices.

Artículo recibido en septiembre de 1997. Revisado en noviembre de 1997.

1. Introducción

El Proceso Analítico Jerárquico (AHP) es una técnica de decisión multicriterio propuesta por Thomas L. Saaty (Saaty, 1980, 1994) que permite abordar la resolución de problemas complejos en los que se combinan, entre otras cosas, aspectos tangibles e intangibles, mediante la utilización de medidas relativas. Este enfoque requiere, conforme a consideraciones sicológicas, que el número de elementos para los que se efectúan las comparaciones relativas no sea superior a 7±2, (Miller, 1956).

Cuando este valor supera el "número mágico" de Miller (7±2), AHP recurre a la utilización de medidas absolutas ("ratings"). No obstante, esta otra forma de abordar la resolución de los problemas de decisión multicriterio, habitualmente empleada en los enfoques normativos, pierde gran parte de la riqueza que ofrece AHP en su versión inicial (medidas relativas) y supone la existencia de unos estándares que, fruto de la experiencia y conocimiento previo del problema, permiten evaluar las alternativas.

Desgraciadamente, debido a la complejidad de la mayoría de los problemas reales, estos estándares no suelen ser conocidos o estar disponibles para su aplicación práctica, en especial cuando se trabaja con aspectos cualitativos o intangibles (Moreno-Jiménez, 1996). Por todo ello, es conveniente desarrollar nuevos procedimientos que permitan aprovechar la precisión y riqueza de las medidas relativas y la operatividad de las medidas absolutas en Problemas de Gran Tamaño (PGT). En este sentido, recientemente se han propuesto otras aproximaciones para trabajar con un elevado número de alternativas.

Wedley, Choo y Schoner (1996) combinan medidas relativas y absolutas en las denominadas medidas "benchmark". En este procedimiento se realizan comparaciones pareadas entre un conjunto predeterminado de alternativas, denominadas alternativas benchmark o alternativas de referencia.

En una primera fase se establece una jerarquía para las alternativas de referencia y se obtienen sus prioridades aplicando AHP. En este caso, las alternativas benchmark deben ser bien conocidas por el evaluador y proporcionar una buena dispersión dentro del posible rango de las mismas. En la segunda fase se añaden nuevas alternativas que son comparadas sólo con las alternativas de referencia, dejando parte de la matriz de comparaciones pareadas incompleta. Para obtener las prioridades se utiliza el procedimiento de Harker (1987). La normalización de las prioridades globales se hace de forma que la suma de las prioridades de las alternativas de referencia sea la unidad, y por tanto, las prioridades de las demás alternativas quedan expresadas como razones de las alternativas de referencia.

En lo que sigue se presentan dos nuevos procedimientos, basados en la composición de conglomerados, que permiten obtener las prioridades de un conjunto grande de alternativas utilizando medidas relativas. En el primero, se aplica una idea análoga a la empleada por Saaty para agregar conglomerados de diferente

ÍNDICE

orden de magnitud (Saaty,1980), y en el segundo, se agregan los conglomerados conforme a la idea seguida por Monsuur para agregar alternativas (Monsuur, 1996). En ambos métodos se calcula una medida de la inconsistencia utilizando una idea similar a la seguida por Harker para matrices incompletas (Harker, 1987).

Este trabajo se ha estructurado de la siguiente manera: en el segundo apartado (§2) se revisan los conceptos de homogeneidad y conglomerados utilizados en los dos nuevos procedimientos propuestos (§3) para resolver problemas con un gran número de alternativas utilizando medidas relativas. En el cuarto apartado (§4) se define la consistencia para este tipo de métodos y se obtiene una medida de la inconsistencia de los mismos. En el quinto apartado (§5) se comparan los dos procedimientos propuestos en un caso simplificado del Plan Nacional de Regadíos. Por último (§6), se destacan las conclusiones más importantes del trabajo y se señalan posibles líneas de investigación.

2. Homogeneidad y Conglomerados en el Proceso Analítico Jerárquico

El Proceso Analítico Jerárquico no es sólo una técnica de decisión multicriterio, es una filosofía a la hora de abordar la resolución de problemas complejos en los que intervienen varios escenarios, actores y criterios, tanto tangibles como intangibles. Dos de las características más destacadas de esta aproximación son la utilización de comparaciones pareadas para obtener las prioridades locales, o importancias relativas de los elementos considerados, y la existencia de un procedimiento analítico que permite medir la consistencia del decisor a la hora de incorporar sus juicios en la matriz de comparaciones pareadas utilizada en la obtención de las prioridades.

Los sicólogos del conocimiento han comprobado empíricamente que los humanos no son capaces de comparar simultáneamente más de 7±2 elementos. Cuando el número de elementos considerados es mayor, un procedimiento habitualmente empleado consiste en separar los mismos en grupos de tamaño menor que nueve y posteriormente agrupar los resultados en una escala de razón única a partir de los valores relativos obtenidos para los diferentes conglomerados.

Siguiendo este razonamiento surgen tres cuestiones que deben responderse para concretar el procedimiento propuesto: (i) ¿Cómo formar los grupos?; (ii) ¿Cómo agregar los valores obtenidos en los mismos?; y (iii) ¿ Cómo medir la inconsistencia global?

(i) En cuanto a la forma de constituir los grupos, Saaty (1980) propone que los elementos considerados en cada grupo sean del mismo orden de magnitud, esto es, homogéneos. Por su parte, Wedley, Schoner y Tang (1993) y Wedley, Choo y Schoner (1996) argumentan que un grupo muy homogéneo no es deseable y que una cierta heterogeneidad es necesaria para discriminar juicios. Concretamente, en el enfoque de medidas benchmark se utiliza esta misma idea en la construcción del primer conjunto de alternativas (alternativas benchmark).

Los dos métodos aquí propuestos se basan en la idea de homogeneidad exigida en la axiomática de AHP. El segundo axioma establece (Saaty, 1986) que no se pueden comparar entre sí elementos muy distantes o heterogéneos, sino que tienen que estar comprendidos en un mismo orden de magnitud[i]. Para lograrlo se consideran grupos con alguna característica en común, como por ejemplo su localización espacial o temporal. Esta característica que ayuda a la formación de los distintos grupos no se considera propiamente como un criterio en la modelización jerárquica del problema (Peniwati, 1994).

(ii) Respecto a la forma de agregar los conglomerados, esto es, llevar a una escala única las prioridades de los mismos, Saaty (1980) sugiere realizar su composición dos a dos de manera iterativa. Para ello incluye una alternativa común en los dos conglomerados que sirve al igualar su prioridad como elemento de enlace entre ambos.

En nuestro caso, los dos procedimientos propuestos consideran una alternativa de referencia en cada grupo que permitirá el enlace de los mismos de dos maneras diferentes: en la primera, la integración de las prioridades se realiza de forma simultánea (no dos a dos), mientras que en la segunda, se van añadiendo las alternativas de los diferentes conglomerados a las del grupo o conglomerado tomado como pivote. La diferencia es que en este caso no se incluye una alternativa común entre los dos conglomerados que se unen, sino que se comparan entre sí las alternativas seleccionadas como de referencia para cada grupo.

En los dos procedimientos se consideran tres formas de seleccionar las alternativas de referencia o enlace entre los distintos grupos formados: (1) tomar la alternativa de mayor prioridad en cada grupo (en adelante, mejor alternativa); (2) tomar la de menor prioridad (en adelante, peor alternativa); y, (3) tomar una alternativa ordenada en una situación intermedia (en adelante, alternativa mediana).

(iii) Para evaluar la inconsistencia final del procedimiento se han propuesto dos medidas, que corresponden a los dos métodos propuestos. En el epígrafe 4 se detalla el estudio que se ha llevado a cabo de la consistencia y el proceso por el que se han obtenido las expresiones de la medida de la inconsistencia.

3. Procedimiento propuesto

Sean G_k, $k=1,..,N_g$, los N_g grupos en los que se ha separado el conjunto total de alternativas A_j, $j=1,...,n$, siendo el número de alternativas incluidas en cada grupo $n_k=\mathrm{Card}\ (G_k) \leq 9$, y sea u_{ik} la prioridad relativa del elemento i-ésimo del grupo G_k, $i=1,...,n_k$, con $\sum_{i=1}^{n_k} u_{ik} = 1$. El procedimiento propuesto para obtener una única escala de razón para las prioridades de todos los elementos consiste en seleccionar una alternativa de referencia en cada grupo, A_{0k}, que permita realizar los enlaces entre las prioridades de los mismos. La prioridad relativa de esta alternativa de referencia es u_{0k}.

Método 1: En este caso se comparan entre sí las alternativas de referencia de los diferentes grupos, siendo v_{0k} $k=1,\dots,N_g$, las prioridades relativas de las mismas y, se componen todas las prioridades de manera simultánea.

Definición 1: La prioridad final de la alternativa i-ésima del grupo k-ésimo utilizando el método de composición 1, una vez normalizado de modo distributivo es:

$$w_{ik} = \frac{C_k}{C} u_{ik} \quad i = 1,\dots, n_k; \; k = 1,\dots,N_g, \tag{1}$$

con $C_k = \dfrac{v_{ok}}{u_{ok}}$ y $C = \displaystyle\sum_{k=1}^{N_g}\sum_{i=1}^{n_k} u_{ik}\frac{v_{ok}}{u_{ok}} = \sum_{k=1}^{N_g} C_k$.

Método 2: En este caso se comparan individualizadamente las alternativas de referencia de cada grupo respecto a la de referencia de un grupo que se toma como pivote. Los valores así obtenidos permiten enlazar las prioridades relativas de cada uno de los conglomerados, utilizando para ello el siguiente resultado:

Teorema: (Monsuur, 1996) Dados n elementos $A_1,\dots,A_n$ con prioridades w_i $i=1,\dots,n$, introduciendo un elemento A_{n+1} cuyo peso relativo con respecto al elemento r-ésimo A_r, es $c_{n+1,r}$, entonces la prioridad de A_{n+1} en el vector de prioridades conjunto (n+1 elementos) es $h\cdot c_{n+1,r}\cdot w_r$, donde h es una función de n y λ_{max} (valor propio principal asociado a la matriz de comparaciones pareadas de los n primeros elementos). Concretamente,

$$h = \frac{1-\lambda_{max}+\sqrt{(\lambda_{max}-1)^2+4n}}{2}.$$

Definición 2: Denotando por $c_{p,k}$ la comparación relativa de la alternativa A_{0p} frente a la alternativa A_{0k} y por h_k la constante anterior en el grupo k-ésimo, la prioridad final de la alternativa i-ésima del grupo k-ésimo utilizando el método de composición 2, una vez normalizado es:

$$w_{i,p} = u_{i,p}/C \qquad \forall i \in G_p. \tag{2a}$$

$$w_{i,k} = \frac{u_{ik}}{C}\frac{u_{op}}{h_k c_{p,k} u_{ok}} \qquad \forall i \in G_k,\; k \neq p \tag{2b}$$

con $C = \displaystyle\sum_{k=1}^{N_g}\sum_{i=1}^{n_k} u_{ik}\frac{u_{op}}{h_k c_{p,k} u_{ok}}$ siendo $h_p = c_{p,p} = 1$.

Algoritmo: Ambos métodos tienen un cuerpo común en su aplicación (los tres primeros pasos y el último), variando uno de otro en los pasos de obtención de las prioridades de las alternativas de referencia y en la composición (pasos 4, 5 y 6).

PASO 1: FORMACIÓN DE LOS GRUPOS DE ALTERNATIVAS

Dividir el conjunto total de alternativas en grupos de no más de 9 elementos cada uno, siguiendo un criterio de homogeneidad. Sea N_g el número total de grupos y G_k el conjunto de elementos que componen el grupo k, $k=1,\dots,N_g$.

PASO 2: OBTENCION DE LAS PRIORIDADES PARA CADA GRUPO

Para cada grupo de alternativas, obtener el vector de prioridades relativas a partir de comparaciones pareadas. Sea $u_{i,k}$ la prioridad de la alternativa A_i del grupo k de forma que $\sum_{i=1}^{n_k} u_{ik} = 1$ siendo n_k el número de elementos en el grupo G_k.

PASO 3: SELECCIÓN DE LAS ALTERNATIVAS DE REFERENCIA

Seleccionar una alternativa de referencia en cada uno de los grupos, utilizando el mismo criterio para todos ellos (mayor prioridad, menor prioridad, o prioridad mediana). Sea A_{0k} la alternativa de referencia del grupo k-ésimo.

i) *Método 1*

PASO 4: COMPARACIÓN DE LAS ALTERNATIVAS DE REFERENCIA

Comparar las alternativas de referencia de todos los grupos entre sí de forma pareada. Sea $c_{r,k}$ la comparación de A_{0r} con A_{0k}; con $r,k=1,\dots,N_g$; $r\neq k$.

PASO 5: OBTENCIÓN DE LAS PRIORIDADES DE LAS ALTERNATIVAS DE REFERENCIA

Obtener el vector de prioridades para las alternativas de referencia a partir de las comparaciones pareadas del paso anterior: v_{0k}, $k=1,\dots,N_g$, con $\sum_{k=1}^{N_g} v_{0k} = 1$.

PASO 6: COMPOSICIÓN

Obtener el vector de prioridades conjunto utilizando los dos valores que se han obtenido para las alternativas de referencia: u_{0k} en su correspondiente grupo, y v_{0k} en el grupo de alternativas de referencia. Estos valores nos permiten expresar la prioridad de cualquier alternativa en una nueva escala. La prioridad resultante para la alternativa i del grupo k es: $w'_{ik} = C_k u_{ik}$; $i = 1,\dots, n_k$; $k = 1,\dots,N_g$, con $C_k = \dfrac{v_{ok}}{u_{ok}}$.

ii) *Método 2*

PASO 4: COMPARACIÓN DE LAS ALTERNATIVAS DE REFERENCIA

Seleccionar uno de los grupos como grupo pivote (grupo p). Comparar la alternativa de referencia del grupo pivote con las alternativas de referencia de los restantes grupos dos a dos. Sea $c_{p,k}$ la comparación de A_{0p} con A_{0k}, $k=1,\dots,N_g$; $k \neq p$.

PASO 5: OBTENCIÓN DE LAS PRIORIDADES DE LAS ALTERNATIVAS DE REFERENCIA

Incluir la la alternativa A_{0p} en cada uno de los grupos restantes, y obtener su prioridad, en cada caso, como: $u_{n_k+1,k} = h_k c_{p,k} u_{0k}$, $k=1,\dots,N_g$.

PASO 6: COMPOSICIÓN

Obtener el vector de prioridades conjunto utilizando la prioridad de la alternativa A_{0p} en cada uno de los grupos. Las prioridades resultantes son de la siguiente forma:

$w'_{i,p} = u_{i,p}$, $i=1,\dots,n_p$, para las alternativas del grupo pivote.

$w'_{i,k} = C_k u_{i,k}$, $i = 1,\dots, n_k$; para $k \neq p$,

$$\text{con } C_k = \frac{u_{op}}{u_{n_k+1,k}} = \frac{u_{op}}{h_k c_{p,k} u_{ok}} .$$

PASO 7: NORMALIZACIÓN

Normalizar el vector de prioridades conjunto de todas las alternativas para que la suma de sus componentes sea la unidad. El vector de prioridades normalizado será:

$$w_{i,k} = w'_{i,k}/C,\ i=1,..,n_k,\ k=1,..,N_g \text{ dónde } C = \sum_{k=1}^{N_g}\sum_{i=1}^{n_k} w'_{ik}\ .$$

El vector de prioridades resultante, obtenido por cualquiera de los dos procedimientos, mantiene la razón entre las prioridades de las alternativas de cada uno de los grupos considerados, al haber realizado únicamente operaciones de cambio de escala.

En el segundo método propuesto se utiliza menos información que en el primero ya que sólo se compara la alternativa de referencia del grupo de referencia con las alternativas de referencia de los demás grupos (N_g-1 comparaciones), mientras que en el primer método se utilizan todas las comparaciones entre alternativas de referencia ($N_g(N_g-1)/2$ comparaciones). Además, al utilizar el segundo procedimiento se está suponiendo que la introducción de la alternativa A_{0r} en los distintos grupos no modifica las prioridades de dichos grupos.

Nota 1: Los resultados no son los mismos si se cambia el orden entre la composición de conglomerados y la composición jerárquica. Suponiendo el caso más sencillo de jerarquía con tres niveles (meta, criterios y alternativas), debe realizarse en primer lugar la composición de los conglomerados para cada uno de los criterios, y a continuación, efectuar la síntesis jerárquica.

Nota 2: Es posible utilizar diferentes agrupaciones del total de las alternativas para cada uno de los criterios considerados.

4. Consistencia: Definición y Medida

Una de las ventajas del Proceso Analítico Jerárquico es que no se exige transitividad cardinal en los juicios, esto es, permite cierta inconsistencia en el decisor al emitirlos. Saaty (1980) define la consistencia de los juicios como la verificación del resultado $a_{ik}=a_{ij}a_{jk}$ para todo i, j, k de la matriz de comparaciones pareadas. Suponiendo el método del autovector en la obtención de las prioridades locales ($Aw = \lambda_{max}(A)w$, con $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$) como medida de la inconsistencia se toma el valor:

$$RC = \frac{IC(A)}{ICA(n)}$$

donde el numerador es el Indice de Consistencia $IC(A) = \frac{\lambda_{max}(A) - n}{n-1}$; el denominador es el Indice de Consistencia Aleatorio de una matriz de orden n; y $\lambda_{max}(A)$ es el autovalor principal de A(nxn).

Esta *definición no puede ser aplicada directamente a los dos procedimientos propuestos para agregar conglomerados pues el cálculo de $\lambda_{max}(A)$ exige conocer todos los valores de la matriz de comparaciones pareadas, y en nuestro caso ni existe la matriz total (nxn), y caso de suponer su existencia, no se conocen todos los juicios de la misma, esto es, se tendría una matriz incompleta.

De todas formas, este concepto de consistencia resulta especialmente apropiado para poder comparar los procedimientos, por lo que conviene fijar claramente su significado en este contexto y establecer una medida de la misma. Dado que los *juicios emitidos en cada uno de los procedimientos no permiten construir la matriz* de comparaciones relativas total (nxn), se va a aplicar la idea seguida por Harker para trabajar con matrices incompletas.

Definición 3: (Harker, 1987) Dada una matriz de comparaciones pareadas incompleta $A=(a_{ij})$, el vector w de prioridades se obtiene resolviendo el problema del autovector:

$$Bw = \lambda_{max}(B)w, \quad \text{con} \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

donde $\lambda_{max}(B)$ es el autovalor principal de B(nxn) y B es la matriz construida como $B=(b_{ij})$ siendo:

$b_{ij} = a_{ij},\ i \neq j$ si a_{ij} ha sido emitido por el decisor
$b_{ij} = 0,\ i \neq j$ si a_{ij} no ha sido emitido por el decisor
$b_{ii} = 1 + N_i$ donde N_i es el número de juicios no emitido en la fila i de la matriz A

Aunque esta nueva matriz de comparaciones pareadas B no es recíproca positiva, al igual que ocurre con matrices recíprocas positivas completas ($a_{ij}a_{ji} = 1$; $a_{ii} = 1$; *$a_{ij} > 0$) se cumple $\lambda_{max}(B) \geq n$ (Harker, 1987). Este hecho permite definir la inconsistencia* en matrices de comparaciones pareadas incompletas utilizando una expresión análoga a la propuesta inicial de AHP, esto es:

$$IC(B) = \frac{\lambda_{max}(B) - n}{n-1}$$

La expresión anterior permite evaluar la consistencia en el sentido de Harker:

Definición 4: (Harker, 1987) Una matriz de comparaciones pareadas incompleta es consistente si y sólo si $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ para todos los juicios tales que a_{ij}, a_{jk}, $a_{ik} > 0$; es decir, los juicios emitidos deben verificar la condición de consistencia.

Takeda y Yu proponen una definición de consistencia más exigente que la anterior al observar que según la definición de Harker, una matriz incompleta consistente no tiene porqué tener como valor propio máximo asociado, $\lambda_{max}(B)=n$.

Definición 5: (Takeda y Yu, 1995) Se dice que una matriz de comparaciones pareadas incompleta es consistente si y sólo si los juicios emitidos conducen a un único vector de prioridades.

Ejemplo: La siguiente matriz en la que los juicios desconocidos se indican con 0, es consistente según la definición de Harker y no lo es según la de Takeda y Yu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1/2 & 2 \\ 1/3 & 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1/3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}. \text{ El vector de prioridades obtenido es } w = \begin{pmatrix} 0.2094 \\ 0.0627 \\ 0.1685 \\ 0.4511 \\ 0.1083 \end{pmatrix}$$

con λ_{max}= 5,00898, lo que da lugar a un índice de inconsistencia IC(B) = 0,00245. La diferencia en el resultado de aplicar las dos definiciones está provocada por el hecho de que el juicio a_{42} es desconocido, y $a_{41}a_{12} = 2*3 = 6$ que es distinto de $a_{43}a_{32} = 3*3 = 9$, lo que no puede llevar a un único vector de prioridades.

En este trabajo se van a utilizar la medida de inconsistencia definida para matrices incompletas IC(B) y la definición de consistencia de Takeda y Yu, de forma que si una matriz es consistente, entonces IC(B)=0.

Para obtener el valor de IC(B) en los métodos 1 y 2 propuestos en este trabajo para PGT falta conocer cómo calcular en estos métodos $\lambda_{max}(B)$. Para una matriz completa A se tiene que:

$$\lambda_{max}(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_j .$$

Teorema 1: Para una matriz $B=(b_{ij})$ transformada de una matriz incompleta $A=(a_{ij})$ según el método de Harker:

$$\lambda_{max}(B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}w_j = \sum_{i=1}^{n}(N_i - 1)w_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j/a_{ij}>0} a_{ij}w_j . \qquad (3)$$

Demostración: Basta sumar todos los términos de la igualdad matricial $Bw = \lambda_{max}(B)w$.

Utilizando el resultado anterior, se obtienen unas medidas aproximadas de la consistencia de los métodos propuestos según las expresiones (4) y (5), teniendo en cuenta que en el método 1, los juicios emitidos por el decisor corresponden a las comparaciones relativas entre todos los elementos de un mismo grupo, y a las comparaciones entre las alternativas de referencia de todos los grupos; y que en el método 2, los juicios emitidos por el decisor corresponden a las comparaciones relativas entre los elementos de un mismo grupo y a la comparación de la alternativa de referencia del grupo de referencia con las alternativas de referencia de los demás grupos. En ambos casos, los vectores de prioridades obtenidos por los dos métodos, no se corresponden exactamente con los asociados a los λ_{max} considerados.

Teorema 2: En el método 1, la expresión que se obtiene para $\lambda_{max}(M1)$ es:

$$\lambda_{max}(M1) = \frac{1}{C}\left(\lambda^{r}_{max} - N_g + \sum_{k=1}^{N_g} C_k \left(\lambda^{k}_{max} + n - n_k\right)\right) \qquad (4)$$

donde: λ^{r}_{max} es el valor propio principal del grupo formado por las alternativas de referencia; y λ^{k}_{max} es el valor propio principal del grupo k. N_g, n, n_k, C, y C_k son los definidos en §3.

Demostración: Basta aplicar la expresión del teorema 1 a la matriz incompleta definida para el método 1.

Teorema 3: En el método 2, la expresión que se obtiene para $\lambda_{max}(M2)$ es:

$$\lambda_{max}(M2) = \frac{1}{C}\left(\lambda^{r}_{max} + n - n_r + \sum_{k=1,k\neq r}^{N_g} C_k \left(\lambda^{k}_{max} + h_k - 1 + n - n_k\right)\right) + w^{r}_{0}\left(\sum_{k=1,k\neq r}^{N_g} \left(\lambda^{k}_{max} + h_k\right) - (N_g - 1) - n + n_r \right) \qquad (5)$$

donde: λ^{k}_{max}, N_g, N_{alt}, n_k, C y C_k denotan las mismas cantidades que en la expresión para el método 1, λ^{r}_{max} es el valor propio principal del grupo pivote, w_0^{r} es la prioridad de la alternativa de referencia del grupo pivote y h_k es la constante de Monsuur.

Demostración: Basta aplicar la expresión del teorema 1 a la matriz incompleta definida para el método 2.

5. Estudio empírico

El problema seleccionado para la aplicación del procedimiento propuesto es un caso simplificado del Plan Nacional de Regadíos (PNR). En él se debe priorizar y ordenar 30 alternativas o actuaciones, de las cuales 15 corresponden a la cuenca del Segura y las 15 restantes a la cuenca del Ebro. Para resolver este problema utilizando AHP se ha considerado una jerarquía formada por la meta en el nivel superior, tres criterios en el segundo nivel: económicos, sociales y ambientales; y seis subcriterios en el tercer nivel: situación socioeconómica y rentabilidad (económicos); posibilidades de desarrollo, factores demográficos y laborales (sociales); y situación medioambiental (ambientales).

Como el número de alternativas (30) no permite, según las consideraciones sicológicas ya mencionadas, su comparación relativa directa, se ha dividido el total de alternativas en cuatro grupos, utilizando un criterio de localización espacial. El primer grupo (G1) incluye las siete primeras alternativas de la cuenca del Segura (S1-S7); el segundo grupo (G2) las restantes alternativas de la cuenca del Segura

(S8-S15); el tercer grupo (G3) incluye las siete primeras alternativas de la cuenca del Ebro (E1-E7); y el último grupo (G4) las ocho restantes de la cuenca del Ebro (E8-E15).

Siguiendo el procedimiento propuesto, se han obtenido las prioridades relativas de los cuatro grupos de forma independiente. Para agrupar estos valores en una escala de razón común, se han aplicado los dos métodos propuestos en §4. En el primer método, se han considerado tres casos según la alternativa de referencia considerada (mejor, peor o mediana). En el segundo método se han considerado las alternativas de referencia antes utilizadas y se ha tomado cada uno de los cuatro grupos como grupo pivote. En total, se han contemplado 12 situaciones.

El estudio empírico ha comenzado contrastando la significación de las alternativas de referencia seleccionadas para los dos métodos (M1 y M2) y las del grupo pivote considerado en el segundo método (M2). En ambos casos, se ha comprobado, aplicando un test de correlación por rangos de Spearman, que no hay diferencias significativas ($p < 0{,}01$).

Además, para los métodos anteriormente aplicados, se han obtenido los índices de consistencia (IC) siguiendo las expresiones 4 y 5 obtenidas en la sección anterior:

Tabla 1 - Indices de consistencia calculados

	IC
M1-B	0.016693
M1-W	0.012930
M1-M	0.016784
M2-B-G1	0.032098
M2-B-G2	0.029373
M2-B-G3	0.028400
M2-B-G4	0.026062
M2-W-G1	0.012828
M2-W-G2	0.013785
M2-W-G3	0.013192
M2-W-G4	0.016535
M2-M-G1	0.019695
M2-M-G2	0.021396
M2-M-G3	0.021339
M2-M-G4	0.019604

(M1- Método 1, M2- Método 2; B-mejor alternativa,
W-peor alternativa, M-alternativa mediana; Gi- grupo pivote)

Se observan unos índices de consistencia menores cuando se utiliza la alternativa de menor prioridad (W) como alternativa de referencia. Los índices que se obtienen para el método 1 y para el método 2 no son comparables directamente por-que han sido calculados utilizando expresiones distintas. Para poder compararlos se deberían obtener en primer lugar unos índices de consistencia aleatorios que permitan calcular la razón de consistencia (RC) con matrices incompletas de distinto tamaño al igual que en el procedimiento tradicional de AHP (véase Forman, 1990).

Las ordenaciones obtenidas para los dos casos en los que se han obtenido unos índices de inconsistencia menores, el método 1 tomando la alternativa de menor prioridad como enlace, y el método 2 tomando la alternativa de menor prioridad como enlace y el primer grupo como grupo pivote, vienen dadas en la tabla 2.

Tabla 2 - Alternativas ordenadas por su correspondiente prioridad

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
M1-W	S15	S09	S08	S03	E05	E03	S10	S01	E13	S05	S14	S11	E04	S07	S06
M2-W-G1	S15	S09	S08	E05	S03	E03	S10	S01	S14	S11	S05	E04	E13	S07	S12
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
M1-W	S04	E01	S12	S13	E14	E10	E12	E02	E06	E11	E09	E07	S02	E08	E15
M2-W-G1	S13	S06	E02	S04	E01	E14	E06	E10	E11	E12	E07	E09	S02	E15	E08

Como se aprecia en la anterior tabla, existen cuatro bloques de alternativas. El primer bloque corresponde a las ocho primeras alternativas; en el segundo se incluyen las seis siguientes; el tercer bloque recoge las once siguientes; y el último bloque incluye las cinco últimas. En el conjunto de las mejores ocho alternativas sólo se tiene una pequeña diferencia en la ordenación de las alternativas S3 y E5 (cuarta y quinta en la ordenación).

A continuación se muestran las desviaciones de los vectores de prioridades obtenidos por los distintos procedimientos aplicados con respecto al vector de prioridades obtenido al comparar de forma relativa las 30 alternativas entre sí (denominado vector de prioridades esperado), utilizando la desviación absoluta media (MAE); la raíz de la desviación cuadrática media (RMSD), con

$$\text{MAE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|w_i - w_i^*\right|, \quad \text{RMSD} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(w_i - w_i^*\right)^2\right]^{1/2};$$

y la correlación entre la ordenación obtenida y la ordenación esperada, utilizando la expresión del test de correlación por rangos de Spearman,

$r_s = 1 - 6\sum_i d_i^2 \big/ \left(n^3 - n\right)$.

Tabla 3 - Desviaciones con respecto al vector de prioridades esperado

	MAE	RMSD	r_s
M1-B	0.004608	0.006219	0.951502
M1-W	0.008266	0.009228	0.843826
M1-M	0.006338	0.013533	0.919021
M2-B-G1	0.005665	0.007861	0.913237
M2-B-G2	0.005904	0.008024	0.937264
M2-B-G3	0.003847	0.005095	0.973749
M2-B-G4	0.006193	0.008487	0.936819
M2-W-G1	0.010646	0.017376	0.795328
M2-W-G2	0.007937	0.012767	0.945717
M2-W-G3	0.010917	0.017565	0.750834
M2-W-G4	0.005852	0.009808	0.867853
M2-M-G1	0.005013	0.007491	0.947052
M2-M-G2	0.007221	0.010137	0.892325
M2-M-G3	0.011376	0.017593	0.798889
M2-M-G4	0.006282	0.009292	0.901669

Aunque no se pueden establecer diferencias significativas, en la tabla anterior se puede ver que al utilizar el primer método se obtienen unos resultados más próximos al vector de prioridades esperado si se utiliza la alternativa de mayor prioridad como alternativa de referencia. Esta misma observación también puede establecerse para el método 2, que además proporciona unos resultados más próximos que los obtenidos utilizando el método 1. Por último, no se puede decir que haya un grupo que al considerarlo como grupo de referencia en el método 2 proporcione siempre unos resultados más próximos al esperado.

De la comparación de las tablas 1 y 3 se tiene que los métodos para los que se han obtenido unos menores índices de inconsistencia son los que se alejan más del vector esperado calculado comparando las 30 alternativas entre sí. Al analizar este hecho se pueden hacer las siguientes consideraciones:

Se observa una relación entre la consistencia y la homogeneidad de los grupos. Saaty (1994) en respuesta a Murphy (1993) ya aclaraba: "Es precisamente la necesidad de preservar la consistencia la razón por la que se deben comparar elementos homogéneos. Con elementos no homogéneos cualquier cota sobre la consistencia de elementos homogéneos puede violarse y no se pueden establecer conclusiones válidas. En teoría de la decisión las alternativas se encuentran normalmente cerca en sus características. De otra forma, sería obvio cómo escoger la mejor".

En problemas con muchas alternativas es fácil encontrar alternativas bastante distantes entre sí, con lo que una comparación relativa directa entre estos elementos da lugar a matrices de comparaciones pareadas inconsistentes. Si se forman los grupos de manera que estos elementos dispares queden recogidos en las mismas matrices de comparaciones pareadas, la inconsistencia permanece. Si los conglomerados se forman considerando un criterio de homogeneidad los elementos dispares no se comparan directamente, lo que da lugar a matrices con mayor grado de consistencia.

Si la matriz completa es bastante inconsistente, el resultado depende mucho de cómo se formen los conglomerados. Si estos incluyen el juicio o juicios inconsistentes, se parecerá más al resultado final. Si no se incluyen, las prioridades obtenidas diferirán en mayor grado de las prioridades que se obtendrían a partir de la matriz completa.

6. Conclusiones

Una de las limitaciones que plantea la utilización de medidas relativas en el Proceso Analítico Jerárquico es el número de elementos que pueden compararse simultáneamente. Para obviar esta restricción, a lo largo del trabajo se ha propuesto un procedimiento consistente en: (1) la separación del total de alternativas en grupos de elementos con un cardinal menor que el número mágico de Miller (7+2); y (2) la posterior agregación en una escala de razón común de las prioridades relativas obtenidas de manera individual, en cada uno de los grupos considerados.

La separación de los grupos se realiza teniendo presente el axioma de homogeneidad de Saaty. En cuanto a la agregación de conglomerados se plantean dos nuevas vías con diferentes opciones, según la alternativa de referencia seleccionada en los dos métodos y el grupo pivote fijado en el segundo. En ambos métodos se calcula una medida de la consistencia de los juicios considerados.

Según el estudio empírico realizado, no parece haber diferencias significativas entre las ordenaciones alcanzadas al utilizar diferentes alternativas de referencia en la aplicación de los dos métodos, y al considerar diferentes grupos pivote en el segundo método. Respecto a la consistencia, los métodos considerados se comportan mejor cuando se selecciona como alternativa de referencia la de menor prioridad de cada grupo. No obstante, es conveniente ampliar este estudio incorporando aspectos estocásticos en el mismo, los que se realizará en un próximo trabajo, así como la obtención de índices de consistencia aleatorios para los métodos utilizados.

---

i **Axioma de homogeneidad.** Dados una jerarquía H con un número de niveles h, y un elemento x del nivel k-ésimo de la jerarquía ($x \in H$ y $x \in L_k$), el conjunto de sucesores o elementos que cuelgan del elemento x, x^- ($x^- \subseteq L_{k+1}$) es ρ-homogéneo, esto es, para cada par de elementos y_i, $y_j \in x^-$, y $r \geq 1$, se cumple $1/r \leq PC(y_i, y_j) \leq \rho$, donde $PC(y_i, y_j)$ es una función que asigna un valor real positivo a cada par de elementos que representa la intensidad o fuerza de la preferencia del elemento y_i sobre el y_j.

REFERENCIAS

FORMAN E.H. (1990): Random Indices for Incomplete Pairwise Comparison Matrices. *European Journal of Operational Research* 48(1). 153-155.

HARKER P.T. (1987): The Incomplete Pairwise Comparisons in the Analytic Hierarchy Process. *Mathematical Modelling*. 9. 837-848.

MONSUUR H. (1996): An intrinsic consistency threshold for reciprocal matrices. *European Journal of Operational Research*, 96, 387-391.

MORENO-JIMÉNEZ J.M. (1996): "Metodología Multicriterio en el Plan Nacional de Regadíos". Documento Privado.

MILLER (1956): The Magical Number Seven Plus or Minus Two: Some Limits On Our Capacity For Processing Information. *The Psychological Review* 63. 81-97.

MURPHY C.K. (1993): Limits on the Analytic Hierarchy Process from its consistency index. *European Journal of Operational Research* 65, 138-139.

PENIWATI K. (1994): Misuses of Clustering and Absolute Scales of Measurements in the Analytic Hierarchy Process. *Proceedings of the 3rd. International Symposium on the Analytic Hierarchy Process*. Washington DC, 239-250.

SAATY T.L. (1980): *The Analytic Hierarchy Process*. McGraw-Hill. New York.

SAATY T.L. (1986): Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process. *Management Science*, vol. 32 (7) 841-855.

SAATY T.L. (1994): Homogeneity and clustering in AHP ensures the validity of the scale. *European Journal of Operational Research* 72, 598-601.

TAKEDA E.; YU P.L. (1995): Assessing priority weights from subsets of pairwise comparisons in multiple criteria optimization problems. *European Journal of Operational Research* 86. 315-331.

WEDLEY W.C.; SCHONER B.; TANG T.S. (1993): Starting rules for Incomplete Comparisons in the Analytic Hierarchy Process. Mathematical and Computer Modelling, 17, 4-5, 93-100.

WEDLEY W.C.; CHOO E. U.; SCHONER B. (1996): Benchmark Measurement: Between Relative and Absolute, *ISAHP'96*. Vancouver. Canada.