Estudios de Economía Aplicada
Nº 8, 1997. Págs. 5-23

Una generalización del concepto de escindibilidad en las leyes financieras

CRUZ RAMBAUD SALVADOR
VALLS MARTÍNEZ Mª CARMEN
Departamento de Dirección y Gestión de Empresas
Universidad de Almería

Esta versión incluye todas las correcciones sugeridas por el evaluador, las cuales nos han parecido oportunas y por las que le quedamos muy agradecidos.

RESUMEN

El objetivo de este artículo es generalizar la escindibilidad de las leyes financieras para toda operación asociativa y cancelativa entre expresiones, racionales o no, de estas leyes. Como caso particular, tenemos la escindibilidad en producto de la ley y en suma del interés, introduciendo, de forma natural, el concepto de φ-operador (que generaliza al factor financiero) y las leyes financieras φ-escindibles, que generalizan los sistemas sumativos y multiplicativos conocidos.
Palabras-Clave: Escindibilidad, operación asociativa, operación cancelativa, n-operador, ley financiera.

ABSTRACT

The aim of this paper is to generalize the decomposability of financial laws to any associative and cancelative operation between expressions, rational or no, of these laws. As particular cases, we obtain the decomposability with product of the law and the decomposability with addition of interest. Moreover, we introduce, in a natural way, the concept of φ-operator (which generalizes to the financial factor) and the φ-decomposable financial laws, which extend the known additive and multiplicative systems.
Key-Words: Decomposability, associative operation, cancelative operation, n-operator, financial law.

CÓDIGO UNESCO: 0508.

Artículo recibido en noviembre de 1996. Revisado en febrero de 1997.

1. Introducción

Sea $F(x,y)$ la expresión matemática de una ley financiera. Diremos que tal ley es escindible en producto (Insolera (1950, p. 123)) si:

$$F(x,y) = \frac{F(x,\ z)\ .\ F(z,\ y)}{F(z,\ z)};\quad x < z < y,$$

y como $F(z,z) = 1$ (por definición de ley financiera):

$$F(x,y) = F(x,z)\ .\ F(z,y),$$

donde $F(x,y)$ será de la forma:

$$F(x,y) = e^{\phi(y)-\phi(x)} = \frac{\Phi(y)}{\Phi(x)},$$

siendo Φ una función estrictamente creciente (Gil Peláez (1992, pp. 109-121)).

Rodríguez (1984, p. 39) presupone la escindibilidad de la ley financiera cuando enumera las propiedades que debe verificar el factor financiero: "es $f(T,T')\ .\ f(T',T'') = f(T,T'')$ (escindibilidad financiera), o bien, $f(T,T')\ .\ f(T',T'')\ .\ f(T'',T) = 1$ (propiedad circular del factor financiero)", deducida de la propiedad transitiva de la equivalencia de capitales.

Desde el punto de vista práctico, podemos decir, siguiendo a Levi (1973, pp. 70-73) que, "el montante de una inversión no cambia cuando escindimos la inversión en varias inversiones sucesivas, reinvirtiendo cada vez el montante precedente". Esto implica que la intensidad de los intereses no cambia "interrumpiendo y renovando la inversión".

Manca (1978, pp. 49-57) enumerando las cinco condiciones que debe cumplir una función n para ser considerada ley financiera, establece la escindibilidad en producto a través de las condiciones:

iii) $\varphi\,[x,t_2,t_1] \equiv \varphi\,[\varphi\,(x,t_2,t_3),t_3,t_1];\ \forall\, x,t_1,t_2,t_3,$ y

v) $\varphi = f(x)\ .\ h(t_2,t_1),$

de forma que si n es medible existe una única familia de soluciones y precisamente n $= x\ .\ e^{q(t_2)-q(t_1)}$, con $q(t)$ creciente.

Si consideramos la capitalización compuesta $F(x,y) = (1+i)^{y-x}$, podemos verificar que tal ley es escindible en producto:

$$F(x,z)\ .\ F(z,y) = (1+i)^{z-x}\ .\ (1+i)^{y-z} = (1+i)^{y-x} = F(x,y),$$

lo que permite calcular el montante de forma progresiva.

Ahora bien, la capitalizacioón simple:

$$F(x,y) = 1+i(y-x)$$

no será escindible en producto:

$$F(x,z)\ .\ F(z,y) = [1+i(z-x)]\ .\ [1+i(y-z)] \neq 1 + i(y-x) = F(x,y).$$

Así, en este caso, no podemos calcular el montante de forma progresiva a través de la aplicación directa de la ley. Es para salvar este inconveniente por lo que recurrimos al factor financiero:

$$f(x,y,z) = \frac{F(x,\ z)}{F(y,\ z)}.$$

Ahora bien, la capitalización simple verifica la escindibilidad en suma. En efecto, siendo $F(x,y)$ la expresión matemática de la ley financiera e $I(x,y)$ la expresión del interés de esta ley, se deberá verificar para que la ley sea escindible en suma:

$$I(x,y) = I(x,z) + I(z,y) - I(z,z);\ x < y < z,$$

y puesto que $I(z,z) = 0$, entonces:

$$I(x,y) = I(x,z) + I(z,y),$$

y como $I(x,y) = F(x,y) - 1$:

$$F(x,y) - 1 = [F(x,z) - 1] + [F(z,y) - 1],$$

donde $F(x,y)$ será de la forma siguiente:

$$F(x,y) = 1 + [\phi(y) - \phi(x)],$$

siendo ϕ estrictamente creciente (Gil Peláez (1992, pp. 99-105)).

El problema de la escindibilidad ha sido tratado por algunos autores desde el punto de vista de las ecuaciones funcionales. Sobre esto, el lector puede consultar Guerraggio (1996, pp. 33-52).

Siguiendo a Squillante y Ventre (1996, pp. 97-104), si $F(x,t)$ es la ley financiera que nos da el montante como el resultado de desplazar 1 u.m., t períodos desde el vencimiento x, esta ley será escindible si:

$$F(x,s+t) = F(F(x,s),t),$$

y diremos que la ley es escindible por la operación suma.

Si la ley es estacionaria, $F(x,t) = r(t)$, entonces esta condición quedaría: $r(s+t) = r(s)\ .\ r(t)$.

Si generalizamos estas expresiones para toda operación $\circ$:

$$F(x,s \circ t) = F(F(x,s),t),$$

$$r(s \circ t) = r(s)\ .\ r(t),$$

y entonces diremos que la ley es $\circ$-escindible, siendo:

$$s \circ t = g^{-1}(g(s) + g(t)),$$

donde g es continua y creciente.

La organización de este artículo es como describimos a continuación: en la Sección 2 se enumeran algunos conceptos algebráicos básicos necesarios para el desarrollo del trabajo, y la definición de ley financiera con los conceptos asociados a ésta. La Sección 3 es una generalización del concepto de escindibilidad en el caso de leyes financieras estacionarias, considerando toda operación asociativa y cancelativa entre expresiones asociadas a la ley. Posteriormente, en la Sección 4 se extiende el tratamiento a las leyes financieras dinámicas, introduciendo el concepto de n-operador, para caracterizar, finalmente, en la Sección 5, las leyes financieras que son n-escindibles.

2. Preliminares

Un conjunto *A* con una operación o ley de composición interna:

$$* : A \times A \to A,$$

recibe el nombre de *grupoide*.

Adicionalmente, *(A, *)* puede cumplir las siguientes propiedades:

(1) Asociativa.
(2) Existencia de elemento neutro.
(3) Existencia de elemento simétrico.

En el caso de verificar: (1), estamos en presencia de un *semigrupo;* (1) y (2), de un *monoide* y, finalmente, (1), (2) y (3) de la estructura de *grupo*.

Puede ocurrir que además se cumpla la propiedad conmutativa; en este caso, las cuatro estructuras anteriores se nombrarán seguidas de la palabra "conmutativo", o "abeliano".

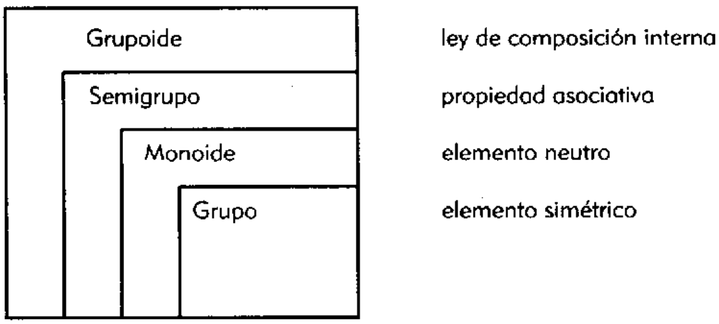

Figura nº 1

Una *acción* de un grupoide sobre un conjunto *E* es una ley de composición externa:

$$v : A \times E \to E,$$

que verifica las condiciones siguientes:

1ª) Propiedad pseudoasociativa o asociativa mixta:

$$v(a,v(b,x)) = v(a * b,x); \quad \forall x \in E\ ;\ \forall a,b \in A.$$

2ª) Elemento neutro:

$$v(e,x) = x \quad ; \ \forall x \in E, \text{ siendo e el neutro de } (A,*).$$

(Solamente en caso de monoide).

Se llama *órbita* del elemento $x \in E$, bajo la acción v del grupoide $(A,*)$ al subconjunto de E:

$$O(x) = \{v(a,x) \ / \ a \in A\}.$$

Se denomina *estabilizador* del elemento $x \in E$ a los elementos del grupoide que dejan fijo x:

$$E(x) = \{a \in A \ / \ v(a,x) = x\}.$$

Para más información, se puede consultar Dubreil (1975, pp. 34-37).

Definición. Una *ley financiera* es una función:

$$F: \Re^3 \to \Re,$$
$$(c,t,a) \mapsto F(c,t,a),$$

que verifica las *condiciones siguientes*:

(1) $F(c,t,a) = c \ . \ F(1,t,a)$.

En lo que sigue, diremos que $F(1,t,a) = F(t,a)$ es la *ley financiera unitaria*:

$$F(c,t,a) = c \ . \ F(t,a).$$

(2) Si $a < b$, $0 < F(t,a) \leq F(t,b)$.

Se dice que $F(t,a)$ es el resultado u output de aplicar sobre el capital financiero $(1,t)$ el plazo o input temporal a. Ver figura nº2.

Analíticamente escribiremos:

$$\frac{\Delta F(t,\ a)}{\Delta a} \geq 0\,.$$

Si $F(t,a)$ fuese derivable con relación a a:

$$\frac{\partial F(t,\ a)}{\partial a} \geq 0\,.$$

(3) $F(t,0) = 1$.

(4) $F(t,a)$ es continua con relación a a.

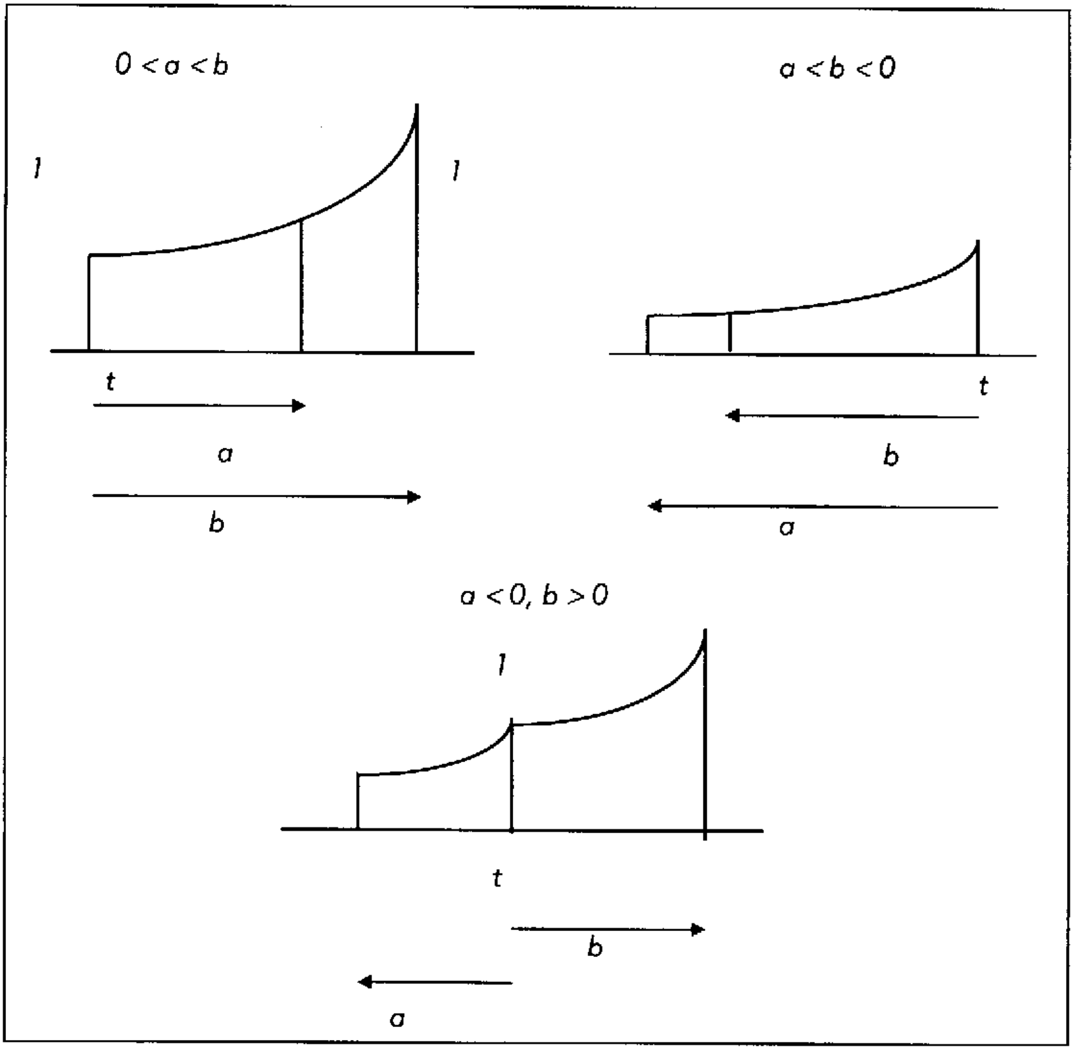

Figura nº2

Definición. Se llama *dominio D* de una ley financiera $F(c,t,a)$, al subconjunto de $\Re^3$ formado por las ternas (c,t,a) que verifican las condiciones (1), (2), (3) y (4) de la definición de ley financiera.

Teniendo en cuenta la homogeneidad de grado 1 con relación a c de la ley financiera, el dominio de toda ley tiene la forma:

$$D = \Re \times D_1 \times D_2, \text{ siendo } D_1, D_2 \subseteq \Re.$$

Restringiendo la definición anterior a la ley financiera unitaria, obtenemos la siguiente

Definición. Se llama *dominio temporal* D_t de una ley financiera $F(c,t,a)$ al subconjunto de $\Re^2$ formado por los pares (t,a) que verifican las condiciones (2), (3) y (4) del concepto de ley financiera unitaria.

Evidentemente se verifica que:

$$D_t = D_1 \times D_2; \; D = \Re \times D_t.$$

Observaciones.-

1ª) Teniendo en cuenta la primera condición, es decir, la proporcionalidad u homogeneidad de grado uno con respecto a la cuantía en una ley financiera, las condiciones (2), (3) y (4) hacen referencia específicamente a la ley financiera unitaria.

2ª) Las leyes financieras más corrientes en la práctica son estrictamente crecientes con relación a a. Estas leyes son llamadas *estrictas*, al contrario de las leyes financieras *monótonas* donde el cociente incremental $\dfrac{\Delta F(t,\, a)}{\Delta a}$ puede ser cero, lo que se corresponde con un crecimiento monótono en relación a la variable a.

3ª) Existen leyes financieras que, siendo incluso continuas en a, no son derivables. Por ejemplo:

$$F(t,a) = \begin{cases} 1 + 0{,}1.\, t.\, a, & si \;\; a \geq 0 \\ 1 + 0{,}2.\, t.\, a, & si \;\; a < 0 \end{cases}$$

es una ley financiera con dominio temporal:

$$D_t = \{(t,a) / \, t > 0, \, a > \frac{-1}{0{,}2.\, t}\}$$

que no es derivable en t, $\forall t \in \Re^+$, puesto que:

$$\left.\frac{\partial F(t,\, a)}{\partial a}\right|_{a=0^+} = 0{,}1.\, t\ ,$$

mientras que:

$$\left.\frac{\partial F(t,\, a)}{\partial a}\right|_{a=0^-} = 0{,}2.\, t\ .$$

4ª) Nos preguntamos si D_2 debe ser necesariamente un intervalo para que la condición (4) de la definición de ley financiera se cumpla. Si nos atenemos a la definición de continuidad, D_2 puede ser cualquier subconjunto de $\Re$ con la única condición de que $F(t,a)$ sea continua con relación a a en este conjunto. Por ejemplo:

$$F(t,a) = 1 + i.t.a,$$

definida en $D_1 \times D_2 = \Re^+ \times (\{0\} \cup [1,2])$.

González Catalá (1992, p. 29) afirma que "El paso del montante del capital $(1,t)$ al montante V se realiza tomando todos los puntos intermedios entre 1 y V y es una consecuencia de todo el tiempo que hay en el intervalo (t,p). Esto exigirá que la ley financiera sea continua con relación a t y con relación a p", lo que está más próximo a la exigencia de que D_2 sea conexo, condición acerca de la cual no se dice nada en la definición. Por consiguiente, nosotros pensamos que D_2 puede ser todo subconjunto conexo o inconexo de $\Re$, incluida la posibilidad de ser discreto, finito o infinito numerable.

A veces, podemos estar interesados en la restricción de una ley financiera de máximo dominio temporal D_t a uno de sus subconjuntos, obteniendo así la siguiente definición:

Sea una ley financiera $F(t,a)$ con dominio temporal $D_t = D_1 \times D_2$:

Definición. Se llama ley financiera desde $t_0 \in D_1$ a la función F_{t_0} que se obtiene restringiendo D_1 a $\{t_0\}$:

$$F_{t_0} : D_2 \rightarrow \Re / \ F_{t_0}(a) = F(t_0,a).$$

3. Estudio general de la escindibilidad

Sea $F(a)$ una ley financiera estacionaria y estricta tal que D_2 es un intervalo (cerrado, abierto, semiabierto, finito o infinito) del conjunto $\Re$ de los números reales. Teniendo en cuenta la condición (4) de la definición de ley financiera, la imagen de D_2 a través de F, $F(D_2)$, es también un intervalo (respectivamente cerrado, abierto, semiabierto, finito o infinito) de los números reales al cual llamaremos I.

Sea $\perp : I \times I \rightarrow I$ una operación continua sobre I que es asociativa:

$$(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z), \text{ para todo } x, y, z \in I$$

y cancelativa, es decir:

$$x_1 \perp y = x_2 \perp y \text{ ó } y \perp x_1 = y \perp x_2 \text{ implican } x_1 = x_2, \text{ para todo } y \in I.$$

En estas condiciones, existe una operación $*$ sobre D_2:

$$* : D_2 \times D_2 \rightarrow D_2$$

que, como $\perp$, es asociativa y cancelativa y que hace que F sea un isomorfismo entre los semigrupos $(D_2, *)$ y $(I, \perp)$, es decir:

$$F(a * b) = F(a) \perp F(b), \text{ para todo } a,b \in D_2.$$

En efecto, aplicando el teorema 1 de Aczél (1987, pp. 106-122), existe una función continua y estrictamente monótona $\phi : J \rightarrow I$, tal que:

$$x \perp y = \phi\,[\phi^{-1}(x) + \phi^{-1}(y)],$$

para todo $x,y \in I$. En este caso:

$$F(a) \perp F(b) = \phi\,[\phi^{-1}(F(a)) + \phi^{-1}(F(b))],$$

para todo $a,b \in D_2$. Esta igualdad puede ser escrita de la siguiente forma:

$$F(a) \perp F(b) = F((F^{-1} \circ \phi)[(\phi^{-1} \circ F)(a) + (\phi^{-1} \circ F)(b)]).$$

Ahora bien:

- $(F^{-1} \circ \phi)^{-1} = \phi^{-1} \circ F$.
- La composición de las funciones continuas F^{-1} y ϕ es continua.
- La composición de las funciones estrictamente monótonas F^{-1} y ϕ es estrictamente monótona.

Así, aplicando de nuevo el teorema mencionado de Aczél, podemos concluir que:

$$(F^{-1} \circ \phi)[(\phi^{-1} \circ F)(a) + (\phi^{-1} \circ F)(b)] = a * b,$$

es una operación continua sobre D_2 que satisface las propiedades asociativa y cancelativa. Así:

$$F(a * b) = F(a) \perp F(b), \text{ para todo,} b \in D_2,$$

lo que significa que F es un isomorfismo entre los semigrupos $(D_2, *)$ y $(I, \perp)$. Por consiguiente, podemos enunciar el siguiente

Teorema y definición. Sea I un intervalo (cerrado, abierto, semiabierto, finito o infinito) del conjunto $\Re$ de los números reales en el cual hemos definido una operación continua $\perp : I \times I \rightarrow I$ que satisface las propiedades asociativa y cancelativa.

Si I es la imagen de una ley financiera estacionaria y estricta $F: D_2 \rightarrow \Re$, existe una operación $* : D_2 \times D_2 \rightarrow D_2$ continua, asociativa y cancelativa que hace que $F: D_2 \rightarrow I$ sea un isomorfismo de semigrupos.

En este caso, diremos que *la ley financiera F es escindible según la operación* $\perp$. •

Como ejemplo particular notable, podemos citar el caso en el cual $\perp$ es el producto ordinario y $*$ es la suma ordinaria:

$$F(a + b) = F(a) \,.\, F(b), \text{ para todo } a,b \in D_2.$$

Tradicionalmente, la escindibilidad de F a través del producto ordinario ha sido llamada *escindibilidad de primera especie* (Maravall (1970, p. 162)) o correspondiente a las *leyes financieras multiplicativas* (Gil Peláez (1992, pp. 121-125)).

Con la misma nomenclatura que el teorema precedente, podemos enunciar el siguiente

Corolario. Sea $\varphi : I \to \Re$ una función estrictamente monótona y continua. Supongamos que sobre $K = \varphi(I)$ se ha definido una operación $\perp : K \times K \to K$ continua, asociativa y cancelativa. Entonces, existe una operación $* : D_2 \times D_2 \to D_2$ continua, asociativa y cancelativa tal que:

$$(\varphi \circ F)\,(a * b) = (\varphi \circ F)(a) \perp (\varphi \circ F)(b),$$

para todo $a,b \in D_2$, es decir, tal que $\varphi \circ F$ es un isomorfismo entre los semigrupos $(D_2, *)$ y $(I, \perp)$.

En este caso, diremos que la *ley financiera F es φ-escindible según la operación $\perp$.*

Como ejemplo particular notable, podemos citar el caso en el cual $\varphi(a) = F(a) - 1$, para todo $a \in D_2$, $\perp$ es la suma ordinaria y $*$ es también la suma:

$$(\varphi \circ F)\,(a + b) = (\varphi \circ F)\,(a) + (\varphi \circ F)\,(b),$$
$$F(a + b) - 1 = [F(a) - 1] + [F(b) - 1],$$

lo que podemos escribir como:

$$I(a + b) = I(a) + I(b),$$

siendo $I(a) = F(a) - 1$ el interés generado por la ley financiera F en cualquier intervalo temporal de duración a.

Tradicionalmente, la φ-escindibilidad de F a través de la suma ordinaria ha sido llamada *escindibilidad de segunda especie* (Maravall (1970, pp. 161-162)) o correspondiente a las *leyes financieras sumativas* (Gil Peláez (1992, pp. 105-109)).

Observemos que la suma ordinaria en K induce la suma reducida en I:

$$F(a) \oplus F(b) = F(a) + F(b) - 1,$$

que, a la vez, induce la suma ordinaria en D_2.

4. Leyes financieras dinámicas: El φ-Operador

Hasta aquí, hemos tenido en cuenta leyes financieras estacionarias, es decir, independientes de t. A continuación, vamos a intentar extender la escindibilidad a toda ley financiera, incluso si ella es dinámica.

En efecto, sea $F(t,a)$ una ley financiera estricta cualquiera. Consideremos la ley financiera desde t:

$$F_t : D_2(t) \to \Re,$$

siendo $D_2(t) = \{a \in \Re / (t,a) \in D\}$.

Sean $I(t) = F_t(D_2(t))$ y φ: $I(t) \rightarrow \Re$ una función estrictamente monótona y continua. Supongamos que sobre $K(t) = \varphi(I(t))$ se ha definido una operación:

$$\perp_t: K(t) \times K(t) \rightarrow K(t),$$

continua, asociativa y cancelativa. Entonces, por el corolario anterior existe una operación:

$$*_t: D_2(t) \times D_2(t) \rightarrow D_2(t),$$

continua, asociativa y cancelativa, tal que:

$$(\varphi \circ F_t)\,(a *_t b) = (\varphi \circ F_t)\,(a) \perp_t (\varphi \circ F_t)\,(b),$$

para todo $a,b \in D_2(t)$.

$(D_2(t), *_t)$ es un semigrupo en el cual se verifica la regla de la simplificación (propiedad cancelativa). Si $*_t$ fuese, además, conmutativa, sabemos que existe un grupo mínimo $\overline{D}_2(t)$ que contiene un semigrupo $D_2'(t)$ isomorfo a $D_2(t)$.

A continuación, repetimos el razonamiento anterior para $K(t)^i$, existiendo así un grupo mínimo $\overline{K}(t)$ que contiene un semigrupo $K'(t)$ isomorfo a $K(t)$. Podemos extender la función $\varphi \circ F_t$ a $\overline{D}_2(t)$, definiendo:

$$(\varphi \circ F_t)\,(a^{-1}) = [(\varphi \circ F_t)\,(a)]^{-1},\ \forall\, a \in D_2(t),$$

así nos aseguramos que $\varphi \circ F_t$ es un isomorfismo entre los grupos $(\overline{D}_2(t), *_t)$ y $(\overline{K}(t)\ ,\perp_t)^{ii}$.

Ahora bien, supongamos que $\overline{D}_2(t)$ y $\overline{K}(t)$ pueden ser tomados como subconjuntos del conjunto $\Re$ de los números reales, lo que no ocurrirá siempre puesto que $\overline{D}_2(t)$ y $\overline{K}(t)$ no deben ser ni siquiera conjuntos numéricos . En este caso, estamos en disposición de formular la siguiente

Definición. Se llama *φ-operador desde t* a una función:
$F_t(\varphi)$: $D_2(t) \times D_2(t) \rightarrow \Re$,
definida por:

$$(a,b) \mapsto F_t(\varphi)(a,b) = (\varphi \circ F_t)(a) \perp_t (\varphi \circ F_t)(b^{-1}),$$

siendo b^{-1} el simétrico de b en $(D_2(t), *)$.

Sea u_t una acción del grupo $\overline{K}(t)$ sobre el conjunto $\Re$ de los montantes de los capitales financieros[iii]. En el conjunto $\Re \times D_1$ se define la siguiente relación binaria R_t:

$$(c_1,t_1)\ R_t\ (c_2,t_2) \text{ si y solo si } t\text{-}t_1,\ t\text{-}t_2 \in D_2$$
$$\text{y } u_t(c_1, (\varphi \circ F_t)(t\text{-}t_1)) = u_t(c_2, (\varphi \circ F_t)(t\text{-}t_2)),$$

para todo c_1, $c_2 \in \Re$ y t_1, $t_2 \in D_1$.

Esta relación binaria es de equivalencia, puesto que evidentemente se verifican las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Si llamamos $t\text{-}t_1 = a$ y $t\text{-}t_2 = b$, nos quedaría:

$$u_t(c_1,(\varphi \circ F_t)(a)) = u_t(c_2,(\varphi \circ F_t)(b)),$$

por consiguiente:

$$u_t(\,u_t(c_1,(\varphi \circ F_t)(a)),(\varphi \circ F_t)(b^{-1})) = u_t(\,u_t(c_2,(\varphi \circ F_t)(b)),\,(\varphi \circ F_t)(b^{-1})),$$

$$u_t(c_1,(\varphi \circ F_t)(a * b^{-1})) = u_t(c_2,(\varphi \circ F_t)(0)).$$

Teniendo en cuenta que $(\varphi \circ F_t)(0)$ es el elemento neutro de $\overline{K}(t)$, nos quedaría:

$$u_t(c_1,(\varphi \circ F_t)(a * b^{-1})) = c_2.$$

$$u_t(c_1,\, F_t(\varphi)(a,b)) = c_2.$$

Esta igualdad puede interpretarse afirmando que las curvas de indiferencia financiera asociadas a una ley financiera desde t son las órbitas de la acción, sobre los montantes de los capitales financieros, del grupo engendrado por un φ-operador de esta ley financiera, cuyo estabilizador es $\{0\}$. El ejemplo más corriente de φ-operador podemos encontrarlo en el factor financiero. En efecto, supongamos que $\perp$ es el producto ordinario y que F es la ley financiera de capitalización simple con $D_2 = [0,+\infty)$. En este caso, teniendo en cuenta la estacionariedad de F,

$$a * b = F^{-1}\,[F(a)\,.\,F(b)].$$

$$F(a)\,.\,F(b) = (1+i.a)\,(1+i.b) = 1 + i.a + i.b + i^2.a.b.$$

$$F^{-1}(x) = \frac{x-1}{i} \Rightarrow F^{-1}\,[F(a)\,.\,F(b)] = F^{-1}\,(1 + i.a + i.b + i^2.a.b) =$$

$$\frac{1 + i.a + i.b + i^2.a.b - 1}{i} = a + b + i.a.b.$$

En este caso, el simétrico de a es a^{-1} tal que:

$$a * a^{-1} = a + a^{-1} + i.a.a^{-1} = 0 \Rightarrow a^{-1}\,(i.a + 1) = -a \Rightarrow a^{-1} = -\frac{a}{1+i.a}.$$

Observemos el carácter estrictamente decreciente de a^{-1} con relación a a, lo que justifica que $0^{-1} = 0$ y $\lim_{a\to\infty} a^{-1} = -\frac{1}{i}$, que se corresponde con los extremos del dominio de la ley financiera de descuento correspondiente:

$$D_2 =]-\frac{1}{i},0].$$

Si consideramos que φ es la identidad, lógicamente $\perp$ continuará siendo el producto ordinario y suponiendo que la acción correspondiente es el producto:

$$F(\varphi)(a,b) = (\varphi \circ F)\,(a * b^{-1}) = F\,(a * b^{-1}) = F(a)\,.\,F(b^{-1}) =$$

$= F(a) \,.\, [F(b)]^{-1} = \dfrac{F(a)}{F(b)}$, que es el factor financiero representado usualmente por $f(t,t+a,t+b)$.

En efecto,

$$F(a) \,.\, F(b^{-1}) = (1 + i.a) \,.\, (1 + i\frac{-b}{1 + i.b}) =$$

$$= (1 + i.a)\,\frac{1 + i.b - i.b}{1 + i.b} = \frac{1 + i.a}{1 + i.b} = \frac{F(a)}{F(b)}.$$

EJEMPLO.- Sea $F(t,a)$ una ley financiera cualquiera (no necesariamente estacionaria), con dominio temporal D_t. En lo que sigue, vamos a suponer que t es fijo, haciendo referencia así a la ley financiera desde t:

$$F_t(a) = F(t,a),$$

con dominio $D_2(t)$, formado por los pares de D_t con primera componente t.

Consideremos la función siguiente:

$$\varphi : F_t(D_2(t)) \to \Re,$$

definida por:

$$x : \quad \varphi(x) = \frac{x - 1}{x} = 1 - \frac{1}{x}.$$

Esta aplicación es inyectiva puesto que:

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{y},$$

lo que implica evidentemente que $x = y$.

Ahora bien, si tenemos en cuenta la composición $\varphi \circ F_t$:

$$(\varphi \circ F_t)(a) = (\varphi \circ F_t)(b) \text{ implica } F_t(a) = F_t(b),$$

de donde se deduce que $a = b$ por ser F_t estrictamente creciente con relación a a (y, por consiguiente, inyectiva). Además, φ es continua.

APLICACIÓN EMPÍRICA:

Si $F(t,a) = (1 + i)^{a^2 + t.a}$, con $i = 0{,}001$, la tabla 1 del Apéndice describe el comportamiento de la aplicación $\varphi \circ F_t$ para $t = 95,\ldots,99$ y $a = 1,2,\ldots,5$.

A continuación, si tenemos en cuenta la operación:

$$x \perp y = 1 - (1-x).(1-y) = x + y - x.y,$$

y la establecemos sobre el conjunto $K(t) = (\varphi \circ F_t)(D_2(t))$, podemos construir primeramente el monoide y después el grupo mínimo $\overline{K}(t)$, por simetrización de $K(t)$, de la forma siguiente:

$$x \perp x^{-1} = x + x^{-1} - x.x^{-1} = 0,$$
$$x^{-1}\,(1 - x) = -x,$$
$$x^{-1} = -\frac{x}{1 - x}.$$

Podemos verificar fácilmente, por el corolario de la Sección 3, que esta operación induce en $\overline{D}_2(t)$ la ley de composición interna:

$$a *_t b = F_t^{-1}\,[F_t(a)\,.\,F_t(b)].$$

Sobre el conjunto de los montantes ($\Re$) definimos la siguiente acción del grupo ($\overline{K}(t)$, $\perp_t$):
$\upsilon(c,x) = c.(1 - x)$.

Evidentemente υ es una acción de ($\overline{K}(t)$, $\perp_t$) sobre $\Re$.

El φ-operador asociado a F sería, en este caso[iv]:

$$F_t(\varphi)\;(a,\;b)\;=\;1\;-\;\frac{F_t(b)}{F_t(a)},$$

porque:

$$(\varphi \circ F_t)(a) = \frac{F_t(a) - 1}{F_t(a)},$$

La tabla 2 del Apéndice muestra la evolución del φ-operador para $F(t,a) = (1 + 0{,}001)^{a^2 + t.a}$, con $a = 1,\ldots,5$ y $t=95$ (letra normal), $t=97$ (letra negrita) y $t=99$ (letra cursiva).

Esto establece que dos capitales son equivalentes:

$$(c_1,\;t_1)\;R_t\;(c_2,\;t_2),$$

si
$\upsilon(c_1,(\varphi \circ F_t)(t_1\text{-}t)) = \upsilon(c_2,(\varphi \circ F_t)(t_2\text{-}t))$,
lo que, en este caso, se traduce de la forma siguiente:

$$c_2 \;=\; c_1.\,\frac{F_t(t_2\;-\;t)}{F_t(t_1\;-\;t)}\qquad,$$

que es la misma condición expresada por el factor financiero de desplazamiento negativo o a la izquierda.

En la tabla 3 podemos ver el resultado de la acción de φ-operador sobre c = *1.000.000* ptas. cuando $t = 95, 97$ y 99.

5. Leyes financieras φ-Escindibles

Se dice que una ley financiera $F(t,a)$ es φ-escindible si verifica la siguiente ecuación:

$$\varphi(F(t,a)) \perp \varphi(F(t+a,b)) = \varphi(F(t,a+b)),$$

para todo $t \in D_1$ y $a,b \in D_2$.

Teorema.- La expresión general de una ley financiera φ-escindible es:

$$F(t,a) = \varphi^{-1}\,[\phi(t+a) \perp (\phi(t))^{-1}],$$

siendo ϕ una función estrictamente creciente.

Demostración.- Fijando $t_0 \in D_1$ tal que $t\text{-}t_0 = a \in D_2$:

$$\underbrace{\varphi(F(t_0,\, t-t_0))}_{\phi(t)} \perp \varphi(F(t,a)) = \underbrace{\varphi(F(t_0,\, t-t_0+a))}_{\phi(t+a)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(F(t,a)) = \phi(t+a) \perp (\phi(t))^{-1} \Rightarrow F(t,a) = \varphi^{-1}\,[\phi(t+a) \perp (\phi(t))^{-1}].$$

Como $t\text{-}t_0 = a$ es creciente con relación a t y $F(t_0,\, t-t_0) = F(t_0,a)$ es creciente con relación a a, $\phi(t)$ es creciente con relación a t.

EJEMPLO.- Las leyes financieras escindibles en producto son φ-escindibles, siendo:

$\varphi(a) = \dfrac{F(a) - 1}{F(a)}$ y $x \perp y = x + y - x.y$, puesto que:

$$\varphi(F(t,a+b)) = \frac{F(t,\ a + b) - 1}{F(t,\ a + b)} = 1 - \frac{1}{F(t,\ a + b)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{F(t,\ a)\ .\ F(t + a,\ b)}.$$

Por otra parte:

$$\varphi(F(t,a)) \perp \varphi(F(t+a,b)) =$$

$$1 - \frac{1}{F(t,\ a)} + 1 - \frac{1}{F(t + a,\ b)} - \left(1 - \frac{1}{F(t,\ a)}\right).\left(1 - \frac{1}{F(t + a,\ b)}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{F(t,\ a)\ .\ F(t + a,\ b)}.$$

Conclusiones

En este trabajo se generaliza el concepto tradicional de la escindibilidad de leyes financieras.

Después de hacer una síntesis del tratamiento que hasta el presente se ha desarrollado sobre el problema de la escindibilidad, se introducen nuevos tipos de leyes financieras escindibles, empleando para ello operaciones algebráicas diferentes de las utilizadas normalmente en la práctica financiera. En efecto,

1. Siendo $F(a)$ una ley financiera estacionaria y estricta:

1.1. Diremos que tal ley es escindible según la operación $\perp$ cuando:

$$F(a * b) = F(a) \perp F(b),$$

siendo las operaciones $*$ (definida sobre el conjunto de los plazos) y $\perp$ (definida sobre el conjunto de las imágenes de F) continuas, asociativas y cancelativas.

Cuando $*$ es la suma ordinaria y $\perp$ el producto ordinario, estamos ante la escindibilidad llamada tradicionalmente de 1ª especie.

1.2. Diremos que la ley financiera F es φ-escindible según la operación $\perp$, siendo $\varphi: I \rightarrow \Re$ una función continua y estricta, cuando:

$$(\varphi \circ F)(a * b) = (\varphi \circ F)(a) \perp (\varphi \circ F)(b).$$

En el caso particular de $(\varphi \circ F)(a) = F(a) - 1$ y de que $*$ y $\perp$ sean la suma ordinaria, estaremos ante la escindibilidad de 2º especie. Además, si φ es la identidad, estamos en el caso anterior.

2. Siendo $F(t,a)$ una ley financiera cualquiera (estacionaria o dinámica) estricta:

2.1. Diremos, considerando la ley financiera desde t, que es escindible según la operación $\perp_t$ cuando:

$$(\varphi \circ F_t)(a *_t b) = (\varphi \circ F_t)(a) \perp_t (\varphi \circ F_t)(b).$$

2.2. Llamamos φ-operador desde t a la función definida como:

$$F_t(\varphi)(a,b) = (\varphi \circ F)(a *_t b^{-1}) = (\varphi \circ F_t)(a) \perp_t (\varphi \circ F_t)(b^{-1}).$$

A través del φ-operador podemos establecer relaciones binarias entre los capitales:

$$(c_1, t_1)\ R_t\ (c_2, t_2), \text{ de la forma siguiente:}$$

$$c_2 = \mathcal{U}_t(c_1, F_t(\varphi)(a,b)),$$

El factor financiero es, como se demuestra en este trabajo, un caso particular de φ-operador.

3. Se demuestra que la expresión más general de una ley financiera φ-escindible es:

$$F(t,a) = \varphi^{-1}\,[\phi(t+a) \perp (\phi(t))^{-1}],$$

donde ϕ es una función estrictamente creciente.

Bibliografía:

AZCÉL, J. (1987): "A Short Course on Functional equations". *D. Reidel, Dordrecht-Boston.*

DUBREIL, P. (1975): *Teoría de Grupos.* Ed. Reverté, S.A., Barcelona.

GIL PELÁEZ, L. (1992): *Matemática de las Operaciones Financieras.* Ed. AC, Madrid.

GONZÁLEZ CATALÁ, V.T. (1992): *Análisis de las Operaciones Financieras, Bancarias y Bursátiles.* Ed. Ciencias Sociales, Madrid.

GUERRAGGIO, A. (1996): "Le Equazioni Funzionali nei Fondamenti della Matematica Finanziaria". *Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali* - Anno 9°, Fascicolo 1°, pp. 33-52.

INSOLERA, F. (1950): *Curso de Matemática Financiera y Actuarial.* Ed. Aguilar, Madrid.

LEVI, E. (1973): *Curso de Matemática Financiera y Actuarial.* Ed. Bosch, Barcelona.

MANCA, P. (1978): "Funzioni di Utilita e Leggi Finanziarie". *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, pp. 49-57.

MARAVALL, D. (1970): *Matemática Financiera.* Ed. Dossat, S.A., Madrid.

RODRÍGUEZ, A. (1984): *Matemática de la Financiación.* Ed. Romargraf, S.A., Barcelona.

SQUILLANTE, M. & VENTRE, A.G.S. (1996): "Decomposable financial laws for associative operations". *Fuzzy Economic Review*, n° 2, vol. I, pp. 97-104.

APÉNDICE:

TABLA 1: $(\varphi \circ F_t)(a)$

a	**t = 95**	**t = 96**	**t = 97**	**t = 98**	**t = 99**
1	0,0914924	0,0924	0,0933067	0,0942125	0,0951174
2	0,1762623	0,1779073	0,179549	0,1811874	0,1828226
3	0,254614	0,2568457	0,2590707	0,2612891	0,2635008
4	0,3268601	0,329546	0,3322211	0,3348855	0,3375394
5	0,3933178	0,3963421	0,3993514	0,4023456	0,405325

TABLA 2: $F_t(\varphi)(a,b)$

a\b	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0 **0** *0*	-0,102909 **-0,105116** *-0,107327*	-0,218842 **-0,223724** *-0,228627*	-0,349656 **-0,357775** *-0,365942*	-0,497502 **-0,509524** *-0,521642*
2	0,0933067 **0,0951174** *0,0969244*	0 **0** *0*	-0,105116 **-0,107327** *-0,109543*	-0,223724 **-0,228627** *-0,233549*	-0,357775 **-0,365942** *-0,374158*
3	0,179549 **0,1828226** *0,1860832*	0,0951174 **0,0969244** *0,0987279*	0 **0** *0*	-0,107327 **-0,109543** *-0,111763*	-0,228627 **-0,233549** *-0,23849*
4	0,2590707 **0,2635008** *0,2679043*	0,1828226 **0,1860832** *0,1893307*	0,0969244 **0,0987279** *0,1005277*	0 0 *0*	-0,109543 **-0,111763** *-0,113988*
5	0,3322211 **0,3375394** *0,3428153*	0,2635008 **0,2679043** *0,2722816*	0,1860832 **0,1893307** *0,1925653*	0,0987279 **0,1005277** *0,102324*	0 **0** *0*

TABLA 3: $L(1.000.000,F_t(\varphi)(a,b))$

a\b	1	2	3	4	5
1	1.000.000 **1.000.000** *1.000.000*	1.102.908,8 **1.105.115,7** *1.107.327*	1.218.841,8 **1.223.724,5** *1.228.626,7*	1.349.656,5 **1.357.774,7** *1.365.941,7*	1.497.501,6 **1.509.523,6** *1.521.642,2*
2	906.693,3 **904.882,63** *903.075,58*	1.000.000 **1.000.000** *1.000.000*	1.105.115,7 **1.107.327** *1.109.542,8*	1.223.724,5 **1.228.626,7** *1.233.548,6*	1.357.774,7 **1.365.941,7** *1.374.157,9*
3	820.451,02 817.177,4 *813.916,85*	904.882,63 903.075,58 *901.272,13*	1.000.000 1.000.000 *1.000.000*	1.107.327 1.109.542,8 *1.111.763*	1.228.626,7 **1.233.548,6** *1.238.490,2*
4	740.929,28 **736.499,22** *732.095,65*	817.177,4 **813.916,85** *810.669,31*	903.075,58 **901.272,13** *899.472,29*	1.000.000 **1.000.000** *1.000.000*	1.109.542,8 **1.111.763** *1.113.987,6*
5	667.778,91 **662.460,64** *657.184,72*	736.499,22 **732.095,65** *727.718,41*	813.916,85 **810.669,31** *807.434,72*	901.272,13 **899.472,29** *897.676,04*	1.000.000 **1.000.000** *1.000.000*

[i]Señalemos que la suposición anterior de que $*_t$ sea conmutativa implica que $\perp_t$ lo es también.

[ii]Continuamos denominando $*_t$ y $\perp_t$ a las operaciones sobre $\overline{D}_2(t)$ y $\overline{K}(t)$,incluso si el conjunto subyacente es ahora más amplio.

[iii]Generalmente, esta acción será el producto.

[iv]Gil Peláez lo llama interés de contracapitalización o de descuento.