Estudios de Economía Aplicada
Nº 9, 1998. Págs. 19-34

Un Análisis de Sensibilidad del Proceso de Tarificación en los Seguros Generales*

GÓMEZ DÉNIZ, E.
Universidad de Las Palmas de G.C.
HERNÁNDEZ BASTIDA, A.
Universidad de Granada
VÁZQUEZ POLO, F.J.
Universidad de Las Palmas de G.C.

Esta versión incluye todas las correcciones sugeridas por el evaluador, las cuales nos han parecido oportunas y por las que le quedamos muy agradecidos.

RESUMEN

La mayoria de la literatura sobre técnicas estadisticas en la Ciencia Actuarial está basada en métodos bayesianos clásicos, en el sentido de que el actuario confía completamente en la distribución a priori del parámetro de riesgo. En este trabajo aplicamos la metodología de la robustez bayesiana para medir la sensibilidad de la prima a posteriori (la que debe cobrarse en ese período) con respecto a perturbaciones en la distribución a priori en el principio de varianza. Un camino habitual para desarrollar lo señalado consiste en desarrollar el mismo estudio bayesiano clásico respecto a la distribución a priori base π_0 sobre una clase de posibles y razonables distribuciones a priori compatibles con las creencias del actuario. Usaremos la clase de ε-contaminación para modelar la incertidumbre sobre la distribución a priori base. Finalmente desarrollaremos un ejemplo para ilustrar las

Artículo recibido en noviembre de 1997. Revisado en enero de 1998.

(*) Investigación parcialmente financiada por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica (España) mediante proyecto PB95-1194. Los autores de la Universidad de Las Palmas de G.C. desean asimismo agradecer la financiación parcial de la Dirección General de Universidades e Investigación del Gobierno Autónomo de Canarias, proyecto 2705. Los autores agradecen los valiosos comentarios de un evaluador anónimo cuyas aportaciones han mejorado sensiblemente este trabajo.

1. Gómez Déniz,E. Correspondencia a: Emilio Gómez Déniz. Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Fac. CC. Económicas. Módulo D. Campus de Tafira. 35017 Las Palmas de G.C. Tfno: +34 28 45 18 03 \ Fax: +34 28 45 18 29. E-mail:emilio@empresariales.ulpgc.es.

compatibles con las creencias del actuario. Usaremos la clase de ε-contaminación para modelar la incertidumbre sobre la distribución a priori base. Finalmente desarrollaremos un ejemplo para ilustrar las ideas expuestas anteriormente.

Palabras Clave: Teoría del Riesgo, Modelo Colectivo Compuesto, Principio de Varianza, Robustez Bayesiana.

SUMMARY

Most of the Bayesian literature on statistical techniques in actuarial science are classical Bayesian methods, in the sense that the actuary is confident on the prior distribution of the risk parameter. In this paper we apply the Bayesian robust methodology to detect how sensitive the experience rated premium (the premium charged in the period) is with respect to perturbations in the prior elicitation for the variance premium principle. A commom way to measure this sensitivity (really local analysis) consists in developing the robustness of the posterior Bayesian analysis as the prior ranges over a class of possible and reasonable prior distributions compatible with actuary's believes. We use ε-contamination classes to model uncertainty on a given base prior π_0. An example to illustrate the above ideas is provided. Some concluding remarks are also given.

Keywords: Risk Theory, Collective Compound Model, Variance Principle, Bayesian Robustness.

Clasificación AMS: 62F15, 62P05.

1. Introducción

El *seguro* es un servicio de seguridad ofrecido por una unidad económica o ente asegurador (sociedad anónima, mutua o cooperativa de seguros) a un cliente. Jurídicamente se trata de un convenio oneroso por el que se establece la transferencia total o parcial a otra entidad (distinta de la que puede sufrirlos) de las consecuencias económicas de determinados siniestros. El contrato en que se materializa este convenio se denomina *póliza de seguro* y el precio del servicio de seguridad es la *prima de seguro*, que es función del riesgo asegurable y de los restantes factores que integran el coste de la empresa, denominándose *prima pura* a la parte de la prima que atiende exclusivamente a la cobertura del riesgo (de ella nos ocupamos en este trabajo). Si un riesgo de una cartera de riesgos es demasiado grande para una compañía pasará parte del mismo a otra u otras compañías, dando origen a los *reaseguros*.

Es objetivo del actuario, entre otros, agrupar las pólizas referentes a un mismo riesgo con una serie de características comunes en un colectivo, al cual le corresponde como tal una determinada prima colectiva. Pero, a su vez, cada póliza tiene un conjunto de características específicas que la diferencian de las demás pólizas, características que en la mayoría de los casos son inobservables o difíciles de cuantificar, pero que se deben tener en cuenta a la hora de calcular las primas de riesgo individuales. La estimación de dichas primas se obtiene utilizando la información pasada de siniestralidad.

En cualquier caso pueden considerarse los parámetros del proceso de reclamaciones como constantes o como variables aleatorias; en el primer caso el modelo será acorde con la estadística tradicional (concepción frecuentista de la probabilidad) y en el segundo caso con la estadística bayesiana (concepcion subjetiva de la probabilidad). Hay autores como Bülhmann (1970), Freifelder (1974), Klugman (1992), Eichenauer et al. (1988) y Makov (1995) entre otros que defienden abiertamente la aproximación bayesiana frente a otros como Margolin (1974) que se oponen a la misma. Sin embargo no podemos decir que existan dos escuelas en esta disciplina, la clásica y la bayesiana, sino que existe una separación que se debe en parte a las distintas situaciones prácticas en que nos encontremos. En algunas ocasiones los juicios subjetivos no pueden evitarse; por ejemplo cuando una compañía introduce una nueva clase de cobertura. En este caso, el actuario deberá realizar una valoración inicial del riesgo en base al conocimiento de otros riesgos similares. La prima obtenida inicialmente podrá ir ajustándose a medida que se disponga de experiencia.

Desde el punto de vista actuarial los seguros se dividen en *vida y no vida*, centrándose nuestro trabajo en los segundos, también denominados *seguros generales*. El estudio de estos seguros se aleja bastante del enfoque clásico de los primeros ya que incorpora técnicas más rigurosas del cálculo de probabilidades y la estadística matemática.

El artículo está estructurado de la siguiente manera. En la sección 2 presentamos las principales técnicas de tarificación e introducimos el principio de varianza. En la sección 3, y de forma breve, exponemos el modelo colectivo compuesto y la distribución de Poisson compuesta. En la sección 4 establecemos los principales teoremas para usar un análisis de robustez bayesiano en Teoría del Riesgo, que consiste en reemplazar una distribución a priori por toda una clase posible de distribuciones para el parámetro de interés, y que en nuestro caso es la media del número de siniestros. En la sección 5 desarrollamos un ejemplo numérico para ilustrar las ideas expuestas. Finalmente en la sección 6 exponemos las conclusiones y líneas abiertas susceptibles de ser abordadas.

2. El principio de varianza

Para un actuario la verdadera prima representa la tasa correcta que una compañía de seguros debería de cobrar por un contrato a un individuo. Para su obtención la compañía (el actuario) debe conocer la distribución del número de siniestros, de la cuantía de un siniestro o bien del coste total. Usualmente denotaremos por X a la variable aleatoria que representa este riesgo. Un procedimiento de calculo de prima se define como sigue.

Definición 1 (de principio de cálculo de prima (Bühlmann, 1970))

Un principio de cálculo de prima es una función H que asigna a un riesgo X un número real P=H(X), que se denomina prima asignada al riesgo X.

Ahora sea $L:\Re^2 \to \Re$ una función de pérdida que atribuye a algún $(x,P) \in \Re^2$ la pérdida sostenida por un decisor que toma la acción P y se encuentra con el resultado x de algún experimento aleatorio. A partir de aquí se define la *verdadera prima individual* de la siguiente manera:

Definición 2 (de verdadera prima individual (Heilmann, 1989))

Dados un riesgo X con función de distribución F(x) y una función de pérdida $L:\Re^2 \to \Re$*, la verdadera prima individual es el valor de P que minimiza la pérdida esperada*

$$\int_{\chi} L(x,P)dF(x) = E[L(x,P)]$$

donde x es el resultado del experimento aleatorio X y P la prima cobrada por tomar x.

Ahora, si $L(x,P) = x(x-P)^2$, entonces:

$$P = \frac{E_F[X^2]}{E_F[X]} = E_F[X] + \frac{Var_F[X]}{E_F[X]},$$

constituye el *principio de varianza*.

La ventaja de este principio es que no sólo estima la siniestralidad media del riesgo, sino que nos proporciona también el recargo de seguridad que debe llevar la prima pura para atender a las desviaciones aleatorias de la siniestralidad. En muchos textos la expresión de *P* se presenta como $P = E[X] + \delta Var[X]$, con d > 0 un parámetro, y se dice entonces que la sobreprima de seguridad es proporcional a la varianza.

Para finalizar este apartado expondremos el caso en el que la distribución de X esta especificada salvo por un parámetro desconocido, y donde la tarificación incorpora experiencia de siniestralidad individual. Por lo tanto consideraremos el caso en el que la distribución de X es conocida salvo por un parámetro, que toma valores en un espacio paramétrico θ. A partir de aquí la verdadera prima individual será denotada por tanto como *P(θ)*.

En este caso el análisis bayesiano nos permitirá combinar la información inicial o a priori que se tiene sobre el parámetro θ con la información muestral para obtener la distribución a posteriori. Si $\pi_0(\theta)$ es la densidad a priori (que refleja las creencias sobre θ antes de obtener la información muestral), y m es la observación muestral de una población cuya distribución depende de θ, la verosimilitud del dato observado la denotaremos por $f(m|\theta)$, y el Teorema de Bayes nos permitirá obtener la distribución a posteriori $\pi_0(\theta|m)$ de la siguiente manera.

$$\pi_0(\theta|m) = \frac{f(m|\theta)\pi_0(\theta)}{\int_{\Theta} f(m|\theta)\pi_0(\theta)d\theta} \propto f(m|\theta)\pi_0(\theta),$$

es decir, como el cociente entre la distribución conjunta $h(m,\theta)= f(m|\theta)\pi_0(\theta)$ y la distribución predictiva $p(m|\pi_0)=\int_\Theta f(m|\theta)\pi_0(\theta)d\theta$.

Una vez observados los datos la información a priori se convierte en información a posteriori vía el Teorema de Bayes. Esto permite construir la prima a posteriori que se define más abajo. A veces, y por conveniencia matemática, el análisis bayesiano considera distribuciones a priori $\pi_0(\theta)$ pertenecientes a una clase conjugada para una verosimilitud dada, para que la distribución a posteriori $\pi_0(\theta|m)$ tenga la misma forma que la distribución a priori con lo que su cálculo es sencillo.

Definición 3 (de prima a posteriori (Heilmann, 1989))

Dados un riesgo X con distribución $F(x|\theta)$, siendo θ un parámetro desconocido con distribución a priori $\pi_0(\theta)$, una función de pérdida $L:\Re^2 \to \Re$, y una muestra m, la prima a posteriori es el valor $P^*_{\pi_0}(m)$ que minimiza

$$\int_\Theta L(P(\theta), P^*_{\pi_0}(m))\pi_0(\theta|m)d\theta,$$

siendo $\pi_0(\theta|m)$ la distribución a posteriori de θ dada la muestra y $P(\theta)$ la verdadera prima, definida anteriormente, es el valor que minimiza

$$\int_\chi L(x, P(\theta))dF(x|\theta)$$

$$P(\theta)=\frac{E_F[X^2|\theta]}{E_F[X|\theta]}, \tag{1}$$

y se deduce que,

$$P^*_{\pi_0}(m)=\frac{E_{\pi_0(\theta|m)}[P(\theta)^2]}{E_{\pi_0(\theta|m)}[P(\theta)]} \tag{2}$$

La idea es la siguiente: la verdadera prima $P(\theta)$ no puede calcularse porque se desconoce el parámetro θ; sin embargo juega un importante papel desde el punto de vista conceptual ya que permite calcular la prima a posteriori, $P^*_{\pi0}(m)$, que será la que cobre la compañía.

3 El modelo colectivo compuesto

Lo ideal cuando se trabaja en Teoría del Riesgo es hacerlo con la distribución del coste total, componiendo los modelos del número de siniestros y coste de los mismos. Desde principios de siglo los investigadores actuariales se han empeñado en proporcionar teorías adecuadas que proporcionen la distribución del daño total, pero muy pocos progresos se han obtenido al respecto, hasta descubrir que la distribución de Poisson proporciona un camino satisfactorio para representar la distribución del número de siniestros ocurridos en una cartera dada de contratos de seguros en un período especificado de tiempo, t. Escribamos esta distribución de probabilidad como $P_n(t) \equiv P_n$.

En el modelo colectivo compuesto se consideran variables aleatorias

$$X_i,\ i=1,2,\ldots,n,$$

estocásticamente independientes e idénticamente distribuidas que se interpretan como el coste individual del i-ésimo siniestro, que no depende de t. Además se supone que el número de siniestros y el coste individual de los mismos son variables aleatorias independientes. Entonces la variable aleatoria coste total (ver Bühlmann, 1970),

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{, tiene como función de densidad}$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} P_n \cdot V^{n*}(x), \qquad x = \sum_{i=1}^{n} x_i \ ,$$

donde $V^{n*}(x_i)$ es la n-ésima convolución de la variable aleatoria X_i.

Una de las desventajas de suponer la distribución de Poisson para el número de siniestros es que la varianza del número de siniestros es igual al número esperado de siniestros. En algunas situaciones la varianza es mayor que la media y es por ello que se han sugerido otras distribuciones, como la distribución binomial negativa. Pese a todo, la suposición de una distribución de Poisson para el número de siniestros es la más extendida (quizás por su sencillez analítica a la hora de calcular la distribución del coste total).

Supondremos que las distribuciones relevantes son como se exponen en el siguiente modelo.

- La variable número de siniestros sigue una distribución de Poisson,

$$P_n(\theta) = \theta^n e^{-\theta} / n!, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

- La variable coste del i-ésimo siniestro sigue una distribución exponencial,

$$f\left(x_i \middle| \lambda,\theta\right)=\lambda e^{\ \lambda x_i}, \qquad \lambda \geq 0.$$

- La variable aleatoria coste total tiene por función de densidad,

$$f\left(x \middle| \lambda,\theta\right)=\sum_n f^{n*}\left(x_i \middle| \lambda\right)\cdot P_n(\theta)$$

La distribución de X, $f\left(x \middle| \lambda,\theta\right)$, depende de los parámetros λ y θ. Ahora, como es usual en Teoría del Riesgo, supondremos λ conocido y aleatorio, con distribución a priori gamma,

$$\theta \sim \Gamma(a,b):\pi_0(\theta)=\frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{a-1}e^{-b\theta}, \qquad \theta>0, a>0, b>0.$$

El modelo así asumido es idéntico al elaborado por Freifelder (1974) y Miller (1980) entre otros. Ahora, si en un número t de períodos de tiempo se observan m siniestros, la probabilidad de este suceso (la verosimilitud del dato observado) es

$$l\left(m \middle| \theta\right)=\frac{(\theta t)^m \cdot e^{-\theta t}}{m!}.$$

La distribución a posteriori de , via teorema de Bayes, es

$$\pi_0\left(\theta \middle| m\right)\propto \theta^{a-1}\theta^m e^{-b\theta},$$

que resulta ser una gamma, $\Gamma(a+m, b+t)$. Indiquemos que el actuario observa el número de siniestros ocurridos durante el numero de períodos de tiempo t, y le son indiferente, por ejemplo, las dos observaciones siguientes,

0,1,3,2,0,3; 1,2,0,0,3,3,

que proporcionan ambas 9 siniestros en 6 períodos de tiempo.

La función de densidad del coste total (ver Gómez, 1996) viene dada por,

$$f\left(x \middle| \theta\right)=\sum_n \frac{\lambda^n x^{n-1}e^{-\lambda x}}{(n-1)!}\cdot\frac{e^{-\theta}\theta^n}{n!}.$$

Las expresiones de la verdadera prima y de la prima a posteriori (Gómez, 1996), vienen dadas por

$$P(\theta) = \frac{\theta + 2}{\lambda}, \tag{3}$$

$$P^*_{\pi_0}(m) = \frac{1}{\lambda} \frac{(a+m+1)(a+m) + 4(a+m)(b+t) + 4(b+t)^2}{(a+m)(b+t) + 2(b+t)^2}, \tag{4}$$

respectivamente, para las que se han utilizado las expresiones (1) y (2).

4. Análisis con entrada más flexible

Desde hace un tiempo se trabaja en análisis bayesiano con una metodología que consiste en procesar información a priori más flexible que las que se exigen en un análisis bayesiano clásico. Bajo estas ideas el problema a tratar consiste en realizar un análisis de sensibilidad bayesiano en el proceso de tarificación de primas de seguros. Por ejemplo, si las creencias a priori del actuario tienen una forma menos elaborada que una distribución a priori, nos planteamos si se podrían ampliar las entradas del análisis bayesiano permitiendo que la especificación a priori fuera una clase o familia de distribuciones en lugar de una sola. Para concretar esta clase podríamos incorporar características que pudieran ser obvias para un actuario, como la unimodalidad, conocimientos de algunos cuantiles, etc. Sobre esta familia el actuario calcularía los extremos inferior y superior de la prima a cobrar, de modo que si la diferencia entre esos dos valores (denominada rango de variación) es grande se hablara de carencia de robustez; si la diferencia es pequeña se dice entonces que el modelo es robusto. La carencia de robustez debe interpretarse de la siguiente forma: *densidades muy parecidas no producen cantidades próximas, y de ahí que el actuario deberá tomar sus decisiones con mucha precaución.* Por contra, un modelo robusto debe interpretarse de esta otra forma: *las decisiones del actuario no se verán sustancialmente modificadas con un elemento u otro de la clase.* Una familia que permite realizar un análisis de sensibilidad como el anteriormente señalado es la *clase de contaminación* (ver Berger, 1985 y Sivaganesan y Berger, 1989, entre otros). En ella la distribución a priori del parámetro está dentro de una clase de distribuciones a priori de la forma

$$\Gamma_\varepsilon = \{\pi(\theta) = (1-\varepsilon)\cdot\pi_0(\theta) + \varepsilon\cdot q(\theta) \quad | \quad q \in Q, \varepsilon \in [0,1]\} \tag{5}$$

La idea es suponer que el actuario especifica una distribución a priori π_0, pero su incertidumbre sobre π la modela admitiendo todas aquellas π que provienen de π_0 contaminándola χ. La clase contaminante Q suele ser una clase muy amplia de distribuciones de probabilidad, pudiendo ser la de *todas las distribuciones*, la de *distribuciones unimodales*, etc. La confianza en la distribución a priori está expresada por el grado de contaminación, ε, de modo que un valor de $\varepsilon = 0$ indica confianza total en la distribución a priori inicial, mientras que un valor de $\varepsilon = 1$ manifiesta desconfianza plena en la misma.

Un objetivo natural del análisis de robustez consiste en encontrar el rango de variación de una cantidad a posteriori, en nuestro caso la prima a posteriori, $P^*_\pi(m)$, cuando $\pi(\theta)$ varía sobre la clase Γ_ε. Nuestro interés, por tanto, consiste en encontrar el $\inf_{\pi\in\Gamma_\varepsilon} P^*_\pi(m)$ y $\sup_{\pi\in\Gamma_\varepsilon} P^*_\pi(m)$. Una primera clase para realizar un análisis de sensibilidad local consiste en tomar la clase de todas las distribuciones. Obviamente esta clase contendrá demasiadas distribuciones poco razonables para el problema que le ocupa; sin embargo cuando el modelo sea robusto el actuario podrá sentirse tranquilo con la prima cobrada.

De otro lado el actuario podría utilizar una clase más reducida y realista, si sobre π_0 tiene alguna característica. Por ejemplo, si tiene confianza en la unimodalidad de π_0 así deben ser todas las distribuciones contenidas en Q. La unimodalidad es un concepto estadístico muy intuitivo y un actuario estadísticamente entrenado (utilizando datos históricos o cualquier otro procedimiento) no debería tener problema sobre el carácter unimodal del parámetro de la distribución del riesgo y su valor numérico. Estamos pues hablando de la clase de todas las distribuciones unimodales con una moda dada.

En este trabajo calcularemos el rango de variación de la prima a posteriori para la clase (5) cuando la clase contaminante considerada es

Q_1 = {*Todas las distribuciones de probabilidad*},

y

Q_2 = {*Todas las distribuciones unimodales con la misma moda*, θ_0, *que* π_0}

Cada clase de contaminación define un escenario para desarrollar un análisis de robustez de la prima a posteriori. La primera clase, Q_1, la denominaremos *escenario de indiferencia*, y la segunda Q_2, *escenario de unimodalidad*.

El uso de otras clases de contaminación ha aparecido de forma natural en muchos otros escenarios en donde propiedades como la simetría o la asignación de cuantiles parecen más fáciles de justificar (véase por ejemplo, Moreno y Cano, 1991;

Moreno y Pericchi, 1991, entre otros). Una revisión completa y profunda del tema puede verse en Berger (1994).

Obsérvese que de (2) se desprende que $P_{\pi}^{*}(m)$ se obtiene como el cociente de dos medias a posteriori. Además, podemos escribirlo como

$$P_{\pi}^{*}(m)=\frac{(1-\varepsilon)N_0(m)+\varepsilon\int_{\Theta}P^2(\theta)l(m|\theta)q(\theta)d\theta}{(1-\varepsilon)D_0(m)+\varepsilon\int_{\Theta}P(\theta)l(m|\theta)q(\theta)d\theta}\equiv P_q^0(m),$$

en donde

$$N_0(m)=\int_{\Theta}P^2(\theta)l(m|\theta)d\theta,$$

y

$$D_0(m)=\int_{\Theta}P(\theta)l(m|\theta)d\theta.$$

Una vez expresada la prima a posteriori de esta forma, los resultados que aparecen a continuación son consecuencia directa de la aplicación de los Lemas 3.2.1 y A.1 en Sivaganesan y Berger (1989).

Teorema 1

$$\inf_{q\in Q}P_q^0(m)=\inf_{\theta\in\Theta}\frac{(1-\varepsilon)N_0(m)+\varepsilon P^2(\theta)l(m|\theta)}{(1-\varepsilon)D_0(m)+\varepsilon P(\theta)l(m|\theta)},$$

$$\sup_{q\in Q}P_q^0(m)=\inf_{\theta\in\Theta}\frac{(1-\varepsilon)N_0(m)+\varepsilon P^2(\theta)l(m|\theta)}{(1-\varepsilon)D_0(m)+\varepsilon P(\theta)l(m|\theta)},$$

Teorema 2

$$\inf_{q\in Q_2}P_q^0(m)=\inf_{z\geq 0}R(z),$$

$$\sup_{q\in Q_2}P_q^0(m)=\sup_{z\geq 0}R(z),$$

con
$$R(z)=\frac{(1-\varepsilon)N_0(m)+\varepsilon\frac{1}{z}\int_{\theta_0}^{\theta_0+z}P^2(\theta)l(m|\theta)d\theta}{(1-\varepsilon)D_0(m)+\varepsilon\frac{1}{z}\int_{\theta_0}^{\theta_0+z}P(\theta)l(m|\theta)d\theta}$$

5. Ejemplo numérico

Para mostrar más claramente las ideas expuestas anteriormente desarrollaremos un ejemplo numérico. Supongamos que el coste esperado de un siniestro para un individuo es conocido por el actuario, con valor alrededor de 2857 u.m. Además el actuario confía por un lado en esperar 2 siniestros cada 28 años (esto supone un número medio de siniestros por año de 0.07), y por otro en que lo más frecuente es que se produzcan 3 siniestros cada 100 años (luego la moda del número de siniestros esta alrededor de un 3%, i.e. $\theta_0 = 0.03$). Bajo los supuestos anteriores y adoptando una distribución gamma para el parámetro de riesgo θ se tiene que $\theta \sim \Gamma(2,28)$. Supondremos también que el número de años de observación son 10, 50 y 100 que producen 1, 5 y 8 siniestros respectivamente.

La tabla 1 muestra el rango de variación de la prima a posteriori para el principio de varianza y varios . También incluye una medida que no depende de la unidad de medida de la prima y que es el *factor de sensibilidad relativa* introducido por Sivaganesan (1991), que hemos adaptado a nuestro problema y viene dado por

$$R.S.=\frac{\sup_{\pi\in\Gamma_\varepsilon}P_\pi^*(m)-\inf_{\pi\in\Gamma_\varepsilon}P_\pi^*(m)}{2\cdot P_{\pi_0}^*(m)}\times 100\%,$$

que puede interpretarse como la cantidad de variación en porcentaje de $P_\pi^*(m)$ alrededor de $P_{\pi_0}^*(m)$ cuando $\pi(\theta)$ varia sobre la clase Γ_ε. La última columna de la tabla se obtiene como la fracción entre el factor *R.S.* obtenido en el escenario de indiferencia y el factor *R.S.* obtenido en el escenario de unimodalidad. En ella se refleja el aumento de robustez obtenido con la incorporación de la propiedad de unimodalidad.

Tabla 1. Rango de variación de $P_\pi^*(m)$									
		Escenario de Indiferencia			**Escenario de Unimodalidad**			**Reduc. en sensibil.**	
	ε	$\inf_{\pi\in\Gamma_\varepsilon} P_\pi^*(m)$	$\sup_{\pi\in\Gamma_\varepsilon} P_\pi^*(m)$	R.S.	$\inf_{\pi\in\Gamma_\varepsilon} P_\pi^*(m)$	$\sup_{\pi\in\Gamma_\varepsilon} P_\pi^*(m)$	R.S.	(en %)
	0.05	5932.70	5961.85	0.24	5937.25	5955.19	0.15	37.50
t = 10	0.10	5931.58	5981.55	0.42	5931.72	5967.93	0.30	28.57
m = 1	0.15	5925.83	6001.90	0.64	5926.11	5980.92	0.46	28.12
Prima	0.20	5919.93	6022.99	0.86	5920.42	5994.21	0.62	27.90
Posteriori	0.25	5913.86	6044.94	1.10	5914.64	6007.84	0.78	29.09
5942.700	0.30	5907.60	6067.91	1.34	5908.77	6021.84	0.95	29.10
	0.35	5901.13	6092.07	1.60	5902.82	6036.26	1.12	30.00
	0.05	5967.17	5983.57	0.13	5967.92	5976.92	0.00	100
t = 50	0.10	5962.15	5994.60	0.27	5963.54	5981.48	0.15	44.44
m = 5	0.15	5957.19	6005.44	0.40	5959.10	5985.96	0.22	45.45
Prima	0.20	5952.25	6016.18	0.53	5954.60	5990.38	0.30	43.40
Posteriori	0.25	5947.30	6026.88	0.66	5950.00	5994.73	0.37	44.00
5972.260	0.30	5942.34	6037.63	0.79	5945.30	5999.03	0.44	44.30
	0.35	5937.31	6048.52	0.93	5940.46	6003.30	0.52	44.08
	0.05	5933.73	5945.07	0.00	5934.50	5940.30	0.00	0.00
t = 100	0.10	5929.29	5951.61	0.18	5930.69	5942.22	0.00	100
m = 8	0.15	5924.99	5958.01	0.27	5926.89	5944.10	0.14	48.014
Prima	0.20	5920.79	5964.32	0.36	5923.08	5945.94	0.19	47.22
Posteriori	0.25	5916.66	5970.60	0.45	5919.25	5947.75	0.23	48.88
5938.330	0.30	5912.57	5976.88	0.54	5915.37	5949.53	0.28	48.14
	0.35	5908.49	5983.23	0.62	5911.43	5951.28	0.33	46.77

Se observa que el factor *R.S.* no es particularmente alto en ninguno de los casos considerados y de ahí que podamos decir que los resultados son razonablemente robustos. En este sentido indiquemos que, como ya dijimos anteriormente, el principio de varianza incluye el recargo de seguridad que debe llevar la prima para atender a las desviaciones de la siniestralidad. Es por ello que la prima a cobrar resulta mayor que la que se cobraría utilizando otros principios de cálculo de prima, como se refleja en la siguiente tabla (véase Gómez, 1996).

Tabla 2. Prima a posteriori para distintos principios

	Prima Neta	Exponencial	Esscher	Varianza
t=10	225.563	255.101	288.635	5942.700
t=50	256.410	289.734	327.460	5972.260
t=100	223.214	252.143	284.858	5938.330

También merece indicarse que el factor *R.S.* aumenta conforme lo hace el grado de contaminación, , y decrece conforme se incrementa el número de períodos de tiempo de observación. Además, y como es obvio, el factor *R.S.* es mayor en el escenario de indiferencia que en el de unimodalidad. Este hecho se explica porque Q_1 seguramente contiene muchas distribuciones a priori poco razonables que artificialmente elevan el rango de variación de la prima a posteriori. En este caso, por ejemplo, para $t=10$ y $\varepsilon = 5\%$ la prima a posteriori puede oscilar un 0.24% alrededor de la prima a posteriori obtenida para la distribución a priori inicial, $\pi_0(\theta)$. Sin embargo el factor *R.S.* decrece hasta un 0.15% en el escenario de unimodalidad, obteniéndose por tanto una reducción de un 37.50%, lo que indica la importancia de la incorporación de la propiedad de unimodalidad.

6. Comentarios finales

La verdadera prima representa la tasa correcta que una compañía de seguros debería cobrar por un contrato de seguros a un individuo. Para su obtención la compañía (el actuario) debe conocer la distribución del coste total, *P*( ). Si esta información no le es asequible entonces no puede calcularse. En este caso la prima que la compañía cobra es la prima a posteriori, $P_{\pi 0}(m)$. Para ello el actuario necesita una distribución a priori inicial, $\pi_0(\theta)$. Ahora bien, ¿quién le asegura que esta distribución a priori sea la correcta si, como se manifiesta en el ejemplo anterior, en la medida en que nos alejamos de la distribución a priori inicial (incrementando el valor de ε) el factor *R.S.* también se incrementa? La especificación de una clase concreta de distribuciones a priori pretende ser un modelo que refleje la incertidumbre que el actuario pueda tener sobre la distribución a priori inicial. Si *R.S.* es pequeño el actuario puede estar tranquilo en sus conclusiones; si *R.S.* es grande el actuario debe ser prudente en el proceso de tarificación o debería utilizar un escenario más robusto, otro principio de calculo de prima, otra distribución, o la consideración de propiedades que permitan usar una clase más reducida.

Incluso cuando el modelo es muy robusto, la incorporación de la unimodalidad reduce significativamente la sensibilidad de la prima a posteriori. Por lo tanto la unimodalidad parece ser una característica conveniente para modelar creencias subjetivas acerca del parámetro de riesgo. Por último, sería conveniente estudiar si cualquier valor de la prima a posteriori perteneciente al intervalo

$$\left(\inf_{\pi \in \Gamma_\varepsilon} P_\pi^*(m), \sup_{\pi \in \Gamma_\varepsilon} P_\pi^*(m) \right)$$

cumple determinadas propiedades de las deseables para un principio de cálculo de prima (véase Straub, 1988 y Gómez, 1996). Si así fuese, y si la longitud del intervalo anterior fuese pequeña, quizás la compañía aseguradora se sentiría tranquila cobrando como valor de la prima cualquiera que estuviese por encima o por debajo de $P_{\pi_0}^*(m)$. Esta política de tarificación podría aprovecharla la compañía de seguros para solucionarle problemas de competitividad con el objetivo de acaparar mayor cuota de mercado.

Bibliografía

BERGER,J. (1985).Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis. Ed.Springer-Verlag. Second Edition.

BERGER,J. (1994). An Overview of Robust Bayesian Analysis. TEST, 3, 5 -120.

BÜHLMANN,H. (1970).Mathematical Methods in Risk Theory. Springer-Verlag

FREIFELDER,L. (1974).Statistical Decision Theory and Credibility Theory and Procedures. Credibility Theory and Applications. Edited by P.M.Kahn. Academic Press,71-88.

EICHENAUER,J; LEHN,J. Y RETTIG,S.(1988).A gamma-minimax result in credibility theory. Insurance: Mathematics & Economics,7,49-57.

GóMEZ,E. (1996). Estadística Bayesiana en Credibilidad con Aplicación a la Fijación de Primas de Seguros. Tesis Doctoral. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

HEILMANN,W. (1989). Decision theoretic foundations of credibility theory. Insurance: Mathematics & Economics,8,77-95.

KLUGMAN,S. (1992).Bayesian Statistics in Actuarial Science.Kluwer Academic Publisher.

MAKOV,U. (1995).Loss robustness via Fisher-weighted squared error loss function. Insurance:Mathematics & Economics,16,1-6.

MARGOLIN,M. (1974). Are the classical and bayesian approaches to credibility empirical valid? Credibility Theory and Applications. Edited by P. M. Kahn. Academic Press, 281-288.

MILLER,R. (1980). Actuarial applications of bayesian statistics. Bayesian Analysis in Econometrics and Statistics. North Holland Publishing Company,197-212.

MORENO, E. y CANO, J.A. (1991). Robust Bayesian Analysis for -contaminations partially known. J. Royal Statist. Soc. B, 53, 143-155.

MORENO, E. y PERICCHI, L.R. (1991). Robust Bayesian Analysis for -contaminations with Shape and Quantile Constraints. Proc.Fifth Inter. Symp. on Applied Stochastic Models and Data Analysis.World Scientifc Publ., 454-470.

SIVAGANESAN,S.(1991).Sensitivity of some posterior summaries when the prior is unimodal with specified quantiles. The Canadian Journal of Statistics,Vol.,19,1,57-65.

SIVAGANESAN,S. Y BERGER,J. (1989). Ranges of posterior measures for priors with unimodal contaminations. The Annals of Statistics,Vol. 17,2,868-889.

STRAUB,E. (1988). Non life-insurance mathematics, Springer-Verlag and Association of Swiss Actuaries, Zürich.