

## **Diseño de un índice para la medición del desarrollo humano**

ERNESTO JESÚS VERES FERRER

*Departamento de Economía Aplicada. Universidad de Valencia.*

*Av. de los Naranjos s/n. 46022 – VALENCIA*

E-mails: [Ernesto.Veres@uv.es](mailto:Ernesto.Veres@uv.es) - Tel.: 963 828 424 - Fax: 963 828 415

### RESUMEN

El presente trabajo propone el diseño de un indicador como alternativa al Índice de Desarrollo Humano (IDH) elaborado por la ONU y base de sus Informes de Desarrollo Humano. Al intervenir en este nuevo indicador más información estadística que guarda relación con dicho desarrollo, es de esperar que permita mejorar la clasificación de países según su desarrollo humano. Adicionalmente, la selección de la información estadística que alimenta al índice pone de relieve la importancia de contar con suficientes estadísticas de calidad para todos los países del mundo, elaboradas con iguales criterios y definiciones que aseguren su comparabilidad.

*Palabras clave:* desarrollo humano, índice, longevidad, nivel de vida, nivel educacional.

### **Design of an human development index**

### ABSTRACT

This work propose an index design (designated as HDI-ordinated) as choice the ONU's Human Development Index (HDI), basic in his Human Development Reports. To be involved in that new index more statistic information connected with the human development, improve substantially the countries ranking of the United Nations reports. The statistic information selection for the index set off the need to strengthen data collection and reporting at the national and international levels, and to standardize definitions and data collections methods.

*Keywords:* educational attainment, human development, index, longevity, standard of living.

JEL classification: C43, O11, O57

Artículo recibido en agosto de 2005 y aceptado para su publicación en octubre de 2006.

Artículo disponible en versión electrónica en la página [www.revista-eea.net](http://www.revista-eea.net), ref.: e-24309.

## 1. CONCEPTO DE DESARROLLO HUMANO

Según la definición dada por la ONU, el desarrollo humano es el proceso de ampliación de las opciones de la gente, aumentando las funciones y capacidades humanas. Representa un proceso a la vez que un fin. Los funcionamientos de una persona se refieren a las cosas valiosas que la persona puede hacer o ser (como estar bien nutrido, vivir una vida larga y tomar parte en la vida de una comunidad), mientras que las capacidades de una persona representan las diferentes combinaciones de funcionamientos que puede lograr la persona.

En todos los niveles de desarrollo las tres capacidades esenciales consisten, primero, en que la gente viva una vida larga y saludable; en segundo lugar, en que tenga conocimientos suficientes; y, finalmente, en que posea acceso a los recursos necesarios para disponer de un nivel de vida decente. Pero el ámbito del desarrollo humano va mucho más allá: otras esferas de opciones que la gente tiene en alta consideración incluyen la participación, la seguridad, la sostenibilidad y la posesión de garantías de disfrute de derechos humanos, todas necesarias para ser creativo y productivo y para gozar de respeto por sí mismo y de una sensación de pertenencia a una comunidad social.

Se comprende la enorme complejidad del anterior concepto. Las tres dimensiones básicas, asociadas a las tres capacidades esenciales comentadas en el párrafo anterior, vienen determinadas por una ingente cantidad de variables, en gran medida muy relacionadas entre sí, y para las que resulta difícil establecer una relación de orden bien definida.

## 2. MEDICIÓN DEL DESARROLLO HUMANO

La medición de un concepto tan vasto como es el de desarrollo humano tiene que ser, a su vez, dificultoso por su extensión y complejidad. Son muchas sus dimensiones y variables asociadas, con muy distintas unidades y escalas de medición. Su integración en forma de medidas agrupadas es necesariamente compleja. Resulta imprescindible valorar la alternativa que se plantea en cuanto a la riqueza y extensión de la medición del desarrollo humano, con su operatividad y posibilidades reales de llevarla a cabo. De ahí la consideración de los indicadores estadísticos como poderoso instrumento para lograr una correcta, a la vez que simplificadora, medición.

No obstante, el concepto de desarrollo humano es mucho más profundo y rico que lo que se puede captar en cualquier índice compuesto o, incluso, en un conjunto detallado de indicadores estadísticos. Además, debemos constatar que no existe una necesaria identificación entre desarrollo humano global y desarrollo económico. Es evidente que éste es un factor –todo lo importante que se quiera– de aquél, pero la concepción de desarrollo humano es mucho más general, de manera que sobre él pivota una visión integral del ser humano. Por ello, debe realizarse dos consideracio-

nes previas que condicionan cualquier aproximación a su medición. En primer lugar, el ingreso dinerario no es la suma total del desarrollo de la vida humana, y la falta de ingreso tampoco es la suma total de las privaciones humanas. De esta manera, al centrarse en temas que trascienden al ingreso, y tratando éste como representación de un nivel de vida decente, un buen indicador de desarrollo humano debe ofrecer una medida más amplia del bienestar humano que la simplemente proporcionada por el ingreso o su carencia. En segundo lugar, debe quedar muy claro que cualquier índice compuesto de desarrollo humano no puede ofrecer una imagen completa por sí solo. Debe complementarse con otros indicadores e información complementaria, aunque describan aspectos parciales del mismo.

Desde que se publicó por primera vez en 1990, el Informe sobre Desarrollo Humano de la ONU ha desarrollado y preparado varios índices compuestos que miden diferentes aspectos del desarrollo humano. El índice básico del Informe es el índice de desarrollo humano (IDH), que mide los logros medios alcanzados en relación al desarrollo humano básico a través de un índice compuesto simple y único, dando lugar a una clasificación de países bien publicitada. Recientemente, se ha aplicado este índice a ámbitos infranacionales, como el planteado por el IVIE (2005) para el caso español. También una modificación del mismo, con inclusión de mayor riqueza informativa, puede encontrarse en la propuesta de Emes (2001).

El IDH mide el logro medio de un país en cuanto a las tres dimensiones básicas del desarrollo humano mencionadas: una vida larga y saludable, los conocimientos y acceso a la cultura y el disfrute de un nivel de vida decente. Por cuanto se trata de un índice compuesto, el IDH se basa a su vez en tres indicadores: longevidad, medida en función de la esperanza de vida al nacer (primera variable); nivel educacional, medido en función de una combinación de la tasa de alfabetización de adultos (ponderación, dos tercios) y la tasa bruta de matriculación combinada primaria, secundaria y terciaria (ponderación, un tercio), segunda y tercera variables; y nivel de vida decente, medido por el PIB per cápita (PPA en \$), cuarta variable. El papel de esta última variable tiene, además, un sentido residual: en el IDH el ingreso se considera como representación del nivel de vida y como reemplazo de todas las opciones humanas que no se reflejan en las otras dos dimensiones.

Así pues, en el cálculo del IDH se utilizan sólo cuatro variables descriptoras de las tres parcelas que representan, y cuya metodología de cálculo puede consultarse en cualquier *Informe de Desarrollo Humano* publicado por la ONU. La principal característica del IDH –base de su utilidad y de la extensión de uso– radica en su sencillez de cálculo, derivada no sólo de la expresión aritmética utilizada, sino también de las mínimas exigencias de información estadística requerida, lo que facilita enormemente su obtención, al simplificar los procesos de normalización, sistematización y armonización de las estadísticas nacionales necesarias. Al respecto, vale la pena consultar las críticas a las estadísticas existentes, que pueden

encontrarse en prácticamente cualquier publicación de este carácter de la ONU, en donde se insite en la necesidad de mejorar la capacidad nacional en materia de estadísticas y de coordinación entre los organismos de estadísticas nacionales e internacionales. De la importancia que la ONU concede al incremento de la capacidad estadística de sus estados miembros es muestra las distintas iniciativas propugnadas por dicho Organismo, como el Plan de Acción de Marrakech para el Trabajo Estadístico y la Red de Métricas de Salud de la OMS (Informe sobre el Desarrollo Humano 2004).

Pero la escasa información estadística empleada es, sin embargo, el gran inconveniente del IDH, al recaer sobre cada una de las cuatro variables estadísticas que lo definen un gran peso en la valoración del desarrollo humano del país al que están referidas. Resolver este problema pasa por disponer de mayor información estadística que permita considerar otras variables susceptibles de ser integradas en un nuevo índice, que asegure una comparabilidad espacial más completa, en línea con las propuestas desarrolladas, por ejemplo, en el proyecto MakeYourOwnIndex del Frederick S. Pardee Center de Boston University (2005).

### 3. DISEÑO DE UN NUEVO ÍNDICE DE DESARROLLO HUMANO

Sea el vector de información  $(X_{1im}^*, X_{2im}^*, \dots, X_{kim}^*)$  asociado al país  $i$ -ésimo, donde  $X_{jim}^*$  es el dato de la característica  $j$  correspondiente a la dimensión  $m=1,2,3$ . Definimos la siguiente transformación para todas las características:

$$X_{jim} = \frac{X_{jim}^* - \min_i X_{jim}^*}{\max_i X_{jim}^* - \min_i X_{jim}^*} \quad [1]$$

Las dimensiones consideradas son las tres estudiadas por el IDH: longevidad, conocimientos y nivel de vida decente. Todas las características transformadas  $X_{jim}$  están definidas en el rango  $[0,1]$ , y supondremos que tienen un comportamiento monótono respecto al desarrollo humano.

Según que la característica tenga una interpretación directa en relación al desarrollo -más valor para  $X_{jim}$  es señal de mayor desarrollo- o inversa -más valor para  $X_{jim}$  es señal de menor desarrollo- se utiliza el siguiente criterio de clasificación en uno de los tres niveles  $C_i$  siguientes, basado precisamente en los límites utilizados para clasificar los países según el IDH alcanzado, tal como se recoge en la metodología de cálculo de este índice:

- $C_i$  si la característica es igual o superior a 0'8,  $X_{ijm} \in [0'8, 1]$  (relación directa) ó si la característica es igual o inferior a 0'2,  $X_{ijm} \in [0, 0'2]$  (relación inversa).

- $C_2$  si la característica es mayor o igual a 0'5, pero inferior a 0'8,  $X_{ijm} \in [0'5, 0'8[$  (relación directa) ó si la característica es mayor a 0'2, pero inferior o igual a 0'5,  $X_{ijm} \in ]0'2, 0'5]$  (relación inversa).
- $C_3$  si la característica es inferior a 0'5,  $X_{ijm} \in [0, 0'5[$  (relación directa) ó si la característica es superior a 0'5,  $X_{ijm} \in ]0'5, 1]$  (relación inversa).

Para cada país definimos su vector de desarrollo  $v = (a, b, c)$  como el vector de tres componentes en el que  $a$  es el número de características que pertenecen al nivel  $C_1$ ;  $b$  es el número de características que pertenecen a  $C_2$ ; y  $c$  es el número de características que pertenecen a  $C_3$ . Cada país tendrá, pues, asociado su vector de desarrollo definido sobre el mismo número de características, esto es,  $a + b + c = k$ .

A efectos de valorar el desarrollo humano de cierto país y compararlo con el de otro se presentan dos alternativas teóricas. La primera incidiría sobre el grado de desarrollo humano ya alcanzado o consolidado; la segunda, valoraría fundamentalmente el esfuerzo necesario para alcanzar un desarrollo humano completo, esto es, se detendría en el déficit de desarrollo humano. La lectura a efectuar sobre el vector de desarrollo es relevante según la alternativa elegida, si se enfatiza, respectivamente, el valor de la componente  $a$  frente al valor de la componente  $c$ , o viceversa. En lo que sigue, para la descripción detallada del proceso de elaboración de un indicador de desarrollo, optaremos por la segunda alternativa, si bien su lectura complementaria permite efectuar la comparación en términos de la primera. El indicador finalmente propuesto incorporará, como apreciaremos más tarde, ambas alternativas.

Podemos aceptar intuitivamente que un mayor valor para  $c$  –componente que indica el número de características de peor nivel– es señal de menor desarrollo humano. A igualdad de dicha componente, el menor desarrollo vendría dado por un mayor valor de  $b$ , para que así el valor de la componente  $a$  fuera mayor. Admitamos que basta que un país tenga una característica en el peor nivel, aunque todas las demás pertenezcan al mejor, para que esté peor considerado que otro país en el que todas sus características pertenezcan al nivel intermedio. Un país que no tuviera ninguna característica en  $C_3$ , esto es, que la componente  $c$  del vector de desarrollo fuera 0, ocuparía una posición mejor en un posible ranking que otro que tuviera una componente  $c$  distinta de cero.

La lectura alternativa a la anterior afirma que mayor valor para  $a$  –componente que indica el número de características de mejor nivel– es señal de mayor desarrollo humano. A igualdad de dicha componente, el mayor desarrollo vendría dado por un mayor valor de  $b$ , para que así la tercera componente  $c$  tuviera menor valor. Un país que no tuviera ninguna característica en  $C_1$ , esto es, que la componente  $a$  del vector de desarrollo fuera 0, ocuparía una posición peor en un posible ranking que otro que tuviera una componente  $a$  distinta de cero.

Definimos la siguiente relación de orden:

**Definición 1.** *Dados dos países con vectores de desarrollo  $v_1 = (a_1, b_1, c_1)$  y  $v_2 = (a_2, b_2, c_2)$  respectivamente, el primer país tiene mayor desarrollo humano que el segundo si, y sólo si*

1.  $c_1 < c_2$ , ó
2.  $c_1 = c_2$  y  $b_1 < b_2$ .

*Los dos países tienen el mismo desarrollo humano si, y sólo si, tienen el mismo vector de desarrollo asociado.*

En esta definición sólo existe un número finito de posibles niveles de desarrollo humano, por lo que podemos ordenarlos desde el peor, dado por el vector  $(0, 0, k)$  en donde  $k$  es el número de características o variables estudiadas, hasta el mayor desarrollo, dado por el vector  $(k, 0, 0)$ . El rango asignado a un país por esta ordenación puede usarse como aproximación a un índice de desarrollo. Esta idea intuitiva equivale a la operativa expresada por la definición siguiente, cuyos resultados y demostración algebraica se desarrollan en el Anexo matemático de este trabajo, y que ponen de manifiesto la igualdad entre la Definición 2 y el rango dado por la ordenación generada por la Definición 1.

**Definición 2.** *Dado un país con vector de desarrollo  $v = (a, b, c)$ , se define su índice de desarrollo como:*

$$ID_1(a, b, c) = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_1) + a$$

$$\text{siendo } s_1 = a + b.$$

El índice de desarrollo varía desde  $0$ , su menor valor que corresponde al peor nivel de desarrollo asociado al vector de desarrollo  $(0, 0, k)$ , hasta  $k(k+3)/2$ , su mayor valor -el máximo valor posible de  $I(a, b, c)$ , como se demuestra en el Anexo matemático- y que corresponde al mayor desarrollo asociado al vector de desarrollo  $(k, 0, 0)$ .

Una expresión equivalente para  $ID_1(a, b, c)$  en términos de las componentes del vector de desarrollo es la siguiente:

$$ID_1(a, b, c) = \frac{a^2 + 2ab + b^2 + 3a + b}{2}$$

Siendo  $k = a + b + c$ , una ligera modificación de la Definición 2 permite establecer el índice de desarrollo expresado en términos relativos. En efecto, la relativización del índice se consigue dividiéndolo por el máximo valor de  $ID_1(a, b, c)$ :

**Definición 3.** *Dado un país con vector de desarrollo  $v = (a, b, c)$ , se define su índice relativo de desarrollo como:*

$$IDr_1(a, b, c) = \frac{\frac{1}{2}(s_1^2 + s_1) + a}{\frac{1}{2}k(k+3)}$$

con  $k = a+b+c$  y  $s_i = a+b$ , y que puede expresarse en porcentaje multiplicándolo por 100.

El índice relativo de calidad varía desde 0, su menor valor que corresponde al peor nivel de desarrollo –país con vector de desarrollo  $(0,0,k)$ –, hasta 1, su mayor valor que corresponde al mayor desarrollo –país con vector de desarrollo  $(k,0,0)$ –.

Como ejemplo, para un país que tenga asociado el vector de desarrollo  $(4, 8, 2)$ , sus respectivos índices de calidad serán:

$$ID_1(4,8,2) = \frac{1}{2}(12^2 + 12) + 4 = 82 \text{ y}$$

$$IDr_1(4,8,2) = \frac{82}{\frac{1}{2} \times 14 \times (14 + 3)} = \frac{82}{119} = 0'689$$

Sin embargo, no parece nada fácil deshacer el índice. Esto es, obtener el número de características que hay en cada uno de los niveles de desarrollo a partir del valor del índice  $I(a, b, c)$ . El Teorema 7, incluido en el Anexo, justifica el siguiente algoritmo para el cálculo inverso del índice:

**Algoritmo inverso.** *Dada un país con índice de desarrollo  $i$ , podemos obtener su vector de desarrollo  $v = (a, b, c)$  mediante el siguiente algoritmo:*

1°. *Calcular  $x$ , la parte entera por exceso de  $\frac{\sqrt{9+8i}-1}{2}$ ,  $x = \left\lceil \frac{\sqrt{9+8i}-1}{2} \right\rceil$ . Se obtiene  $c = k - x + 1$ , siendo  $k = a + b + c$ .*

2°. *Las otras dos componentes  $a$  y  $b$  del vector de desarrollo son:*

$$b = \frac{x^2 + x}{2} - i - 1 \quad a = i - \frac{x^2 - x}{2}$$

Por ejemplo, con 14 indicadores,  $k = 14$ , y un índice de desarrollo  $ID_1(v) = 85$  que corresponde al vector  $v = (a, b, c)$ , éste puede calcularse de la siguiente forma: en un

primer paso se calcula  $x = \left\lceil \frac{\sqrt{9+8 \times 85}-1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{\sqrt{689}-1}{2} \right\rceil = 13$ . Se obtiene  $c =$

$14 - 13 + 1 = 2$ . Las otras dos componentes resultan ser  $b = \frac{13^2 + 13}{2} - 85 - 1 = 5$  y

$a = 85 - \frac{13^2 - 13}{2} = 7$ . Con lo que ya se completa el vector de desarrollo,  $v = (7, 5, 2)$ .

Se puede obtener una sencilla clasificación del desarrollo humano coherente con la relación de orden de la Definición 1, a partir del índice de desarrollo  $ID_1(a, b, c)$  de la Definición 2, como se muestra a continuación.

**Clasificación del desarrollo humano a través de  $I(a, b, c)$ .** *Un país con índice de calidad  $i$  le corresponde la siguiente clasificación de su grado de desarrollo:*

- *Mayor grado de desarrollo.* Sólo si  $i = \frac{1}{2}k(k+3)$ , siendo  $k = a + b + c$ , todas sus características pertenecen al nivel  $C_1$  (valores en  $[0'8, 1]$  o en  $[0, 0'2]$  según el sentido directo o inverso de la característica en relación con el desarrollo humano).
- *Grado de desarrollo intermedio.* Si  $\frac{1}{6}k(k+1) - 1 < i \leq \frac{1}{2}k(k+3) - 1$  tiene características en  $C_2$  (valores en  $[0'5, 0'8[$  o en  $]0'2, 0'5]$  según el sentido directo o inverso de la característica en relación con el desarrollo humano, sin tener características en  $C_3$ ).
- *Menor grado de desarrollo.* Si  $i \leq \frac{1}{6}k(k+1) - 1$  tiene características en  $C_3$  (valores en  $[0, 0'5[$  o en  $]0'5, 1]$  según el sentido directo o inverso de la característica en relación con el desarrollo humano).

El índice  $IDR_1(a, b, c)$  definido está basado en el papel preponderante de la tercera componente  $c$ , y por tanto enfatiza el esfuerzo exigido a un país para alcanzar el desarrollo humano pleno, entendido éste como aquél en el que todas las características pertenecen a la primera categoría  $C_1$ . De forma paralela, intercambiando el orden de las componentes del vector de desarrollo  $v = (c, b, a)$ , podemos definir el índice

$$IDR_2(c, b, a) = 1 - \frac{\frac{1}{2}(s_2^2 + s_2) + c}{\frac{1}{2}k(k+3)}$$

con  $s_2 = c + b$  y  $k = a + b + c$ , en el que el énfasis se realiza sobre el nivel de desarrollo ya alcanzado. Por misma definición,  $IDR_2(a, b, c)$  sigue tomando valores entre 0, situación de mínimo desarrollo humano asociado al vector de desarrollo  $(0, 0, k)$ , y 1, situación de máximo desarrollo humano asociado al vector de desarrollo  $(k, 0, 0)$ .

La media geométrica de los índices anteriores engloba las dos alternativas del desarrollo humano, lo que permite definir finalmente el índice de desarrollo humano para un país con vector de desarrollo  $v = (a, b, c)$ :

$$IDR(abc) = \sqrt{IDR_1(a, b, c) \times IDR_2(c, b, a)} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(s_1^2 + s_1) + a}{\frac{1}{2}k(k+3)} \times \left(1 - \frac{\frac{1}{2}(s_2^2 + s_2) + c}{\frac{1}{2}k(k+3)}\right)} \quad [2]$$

con  $s_1 = a + b$ ,  $s_2 = c + b$  y  $k = a + b + c$ .

El índice de desarrollo relativo  $IDR(a, b, c)$  toma valores entre 0, que expresa una situación de desarrollo humano mínimo –todas las características estudiadas pertenecen al nivel mínimo de desarrollo, esto es, corresponde a un país con vector de



desarrollo  $(0,0,k)$ -, hasta  $I$ , que corresponde a una situación de máximo desarrollo humano, en el que todas las características estudiadas pertenecen al nivel de máximo desarrollo, y que se corresponde con un país cuyo vector de desarrollo sea  $(k,0,0)$ . Engloba las dos lecturas alternativas comentadas con anterioridad: por una parte, el déficit de desarrollo expresado por la cantidad de variables que pertenecen al peor nivel de clasificación; por otra, el grado de desarrollo alcanzado, expresado por el número de variables que pertenecen al máximo nivel de desarrollo. Constituye una alternativa al IDH de la Oficina del PNUD dependiente de la ONU. En lo que sigue, para distinguirlos, nos referiremos al ahora definido como IDH-ordenado, al construirse respetando la ordenación según el vector de desarrollo.

Conviene plantear ahora varias alternativas basadas en el nuevo índice definido. Recordemos que el IDH tiene tres dimensiones, y todas ellas presentan igual peso dentro del mismo. Este hecho también es respetado por el IDH-ordenado, *siempre que sea el mismo el número de variables elegidas para valorar cada una de las dimensiones*. Esta posibilidad es equivalente conceptualmente al cálculo de tres índices de desarrollo  $IDr_m(a, b, c)$ , definidos según [2] sobre cada dimensión, utilizando para ello sólo las características  $X_{jim}$  asociadas a cada dimensión  $m$  por separado, e independientemente del número de características elegidas para cada una de ellas. El nuevo índice de desarrollo se definiría como simple media aritmética de los índices de desarrollo asociados a cada dimensión:

$$IDH - ordenado = \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 IDr_m(a, b, c) \quad [3]$$

Sobre el IDH-ordenado así definido no serían válidas las propiedades –respeto de la ordenación, cálculo del algoritmo inverso, etc.- comentadas en este apartado y válidas para el índice de desarrollo  $IDr(a, b, c)$ , y que sí serían válidas para cada una de sus componentes  $IDr_m(a, b, c)$  por separado. Sin embargo, la anterior formulación presenta la evidente ventaja de utilizar toda la información que se considere adecuada, sin exigir que el número de variables por dimensión sea igual. De esta forma, conforme se fueran disponiendo nuevas variables podrían incorporarse al IDH-ordenado.

La misma exigencia de iguales pesos para las tres dimensiones se respetaría también si dentro de cada dimensión las características se ponderaran por pesos cuya suma fuera la unidad. Recordemos que en la segunda dimensión del IDH, la que se refiere a los conocimientos, intervienen dos variables ponderadas, respectivamente, por  $2/3$  y  $1/3$ .

Pero en caso de que *no fuera exigible la exigencia de igualdad en la importancia de las tres dimensiones*, el diseño del índice de desarrollo  $IDr(a, b, c)$  definido en [2] permite utilizar el número de variables de cada dimensión para ponderar éstas de forma no necesariamente igualitaria. En efecto, la aplicación directa de  $IDr(a, b, c)$  sobre todas las características  $X_{jim}$  observadas, sin distinguir el subíndice  $m$ , proporciona

mayor importancia dentro de él a la información de aquella dimensión sobre la que se utiliza mayor número de características. Así, una posible segunda propuesta definiría un nuevo índice de desarrollo como el índice  $IDr(a, b, c)$  aplicado directamente sobre toda la información en su conjunto, sin la exigencia de un mismo número de características para cada dimensión. En este caso todas las propiedades comentadas antes –respeto de la ordenación, algoritmo de cálculo inverso, etc.- seguirían respetándose en el nuevo índice.

También es posible introducir pesos sobre las características  $X_{jim}$  de forma muy sencilla. Si se considera que una característica concreta es doblemente importante que cada una de las demás, es suficiente repetir dos veces su valor, aumentando de esta forma en uno el número total de características observadas. Procediendo de esta manera se pondera la importancia de cada una de las características respecto al conjunto, y el número total de características aumenta en el mismo número de repeticiones efectuadas.

En lo que sigue, a fin de efectuar comparaciones entre los rankings obtenidos por el IDH y el IDH-ordenado, y para respetar que la importancia de las tres dimensiones del desarrollo humano sea igual, éste último va a definirse definitivamente a partir de la formulación [3]. La aplicación directa de  $IDr(a, b, c)$  (formulación [2]) *sobre todo el conjunto de características sobre las que se dispone de información estadística, y aceptando igual número de ellas por dimensión del IDH*, exigiría la previa selección de variables –no exenta de arbitrariedad- a fin de conseguir el mismo número de ellas por dimensión de desarrollo humano. Con la formulación [3] queda garantizado idéntico peso para cada dimensión en el nuevo IDH-ordenado, a semejanza del IDH.

En Beamonte *et al* (2004) se define un índice dentro de un esquema en parte semejante al aquí desarrollado, aplicado a la valoración de la calidad del agua prepotable, y para el que se tiene en cuenta 4 niveles de clasificación de calidad para los datos observados, frente a los tres niveles aquí empleados.

Puede criticarse que el índice ordenado aplicado sobre dos países con mismo vector de desarrollo  $(0, 0, k)$  para las tres dimensiones proporciona idéntico valor, por lo que la discretización introducida por el índice no tiene en cuenta la continuidad de los valores de las características que lo alimentan. Pero si el número de características utilizadas en su cálculo es suficientemente amplio existe una continuidad real, al ser difícil encontrar países con iguales vectores de desarrollo. Pero, además, hay una objeción teórica a la crítica planteada: si muchas características son todas expresivas de un mal desarrollo, ¿tienen sentido la continuidad para expresar que un país es peor que otro? La discretización tiene la ventaja de situar en situaciones de desarrollo equiparables a países cuyas diferencias no son lo suficientemente claras para clasificarlos en posiciones diferentes. Idéntico razonamiento puede aplicarse para las situaciones de optimidad.

#### 4. EQUIVALENCIA ENTRE EL IDH Y EL IDH-ORDENADO

El IDH-ordenado se ha definido como una media aritmética simple de tres indicadores de desarrollo correspondientes a cada dimensión considerada, cada uno de los cuales respeta la ordenación expresada en términos de posición dentro de una escala unitaria. De ahí que el indicador de cada dimensión puede interpretarse como el percentil asignado a cada país según el respectivo desarrollo humano de esa dimensión. El IDH-ordenado, como media aritmética, expresaría ese percentil medio de desarrollo humano.

El IDH referido a un año concreto clasifica el desarrollo humano de un país según su respectivo valor en las tres categorías conocidas definidas por los límites frontera 0'8 y 0'5. Por tanto, si denotamos por  $n_{DA}$ ,  $n_{DM}$  y  $n_{DB}$  el número de países clasificados en la categoría  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  respectivamente, el valor del IDH-ordenado que representa la frontera de clasificación de un país con desarrollo alto ( $DA$ ), medio ( $DM$ ) o bajo ( $DB$ ) será el percentil que proporciona el mismo conjunto de valores  $n_{DA}$ ,  $n_{DM}$  y  $n_{DB}$  a fin de conseguir la coincidencia del número de países igualmente clasificados:

*Límite \_ frontera DA / DM en el IDH – ordenado = Percentil(Valor \_ percentil(IDH = 0'8)*

*Límite \_ frontera DM / DB en el IDH – ordenado = Percentil(Valor \_ percentil(IDH = 0'5)*

No obstante, a pesar de que se consiga la coincidencia numérica anterior, como es de esperar habrá países que modificarán la clasificación de su desarrollo según se utilice el IDH o el IDH-ordenado, y tal como podrá apreciarse en la aplicación que se desarrolla en el apartado siguiente.

#### 5. APLICACIÓN AL IDH 2002: COMPARACIÓN DE RESULTADOS

La metodología se ha aplicado a un conjunto de variables publicadas en el Informe de Desarrollo Humano 2004: 25 variables descriptoras de la dimensión longevidad, relacionadas en las Tablas 1, 5, 6, 7, 8 y 9 de su Anexo estadístico; 20 características para la dimensión conocimientos, incluidas en las Tablas 1, 10, 11, 12, 24 y 26; y, finalmente, 11 variables para la dimensión nivel de vida, que aparecen en las Tablas de información estadística 1, 13, 14, 15, 19, 20, 21, 26 y 27. El criterio básico de selección ha consistido en elegir aquellas cuyo coeficiente de correlación con el IDH para los datos originales es, al menos, superior –en valor absoluto- a 0'5. Se resumen en la Tabla 1 siguiente:

**Tabla 1. Características que intervienen en el IDH-ordenado  
y cu correlación con el IDH**

Variable	Correlación
<b>1 DIMENSIÓN: LONGEVIDAD</b>	
1.1 Esperanza de vida al nacer (años). 2002	0,918
1.2 Tasa anual de crecimiento demográfico. 1975-2002	-0,547
1.3 Población urbana (% del total). 2002	0,719
1.4 Población menor de 15 años (% del total) 2002	-0,863
1.5 Población de 65 y más años (% del total). 2002	0,712
1.6 Tasa total de fecundidad (nacidos por cada mujer). 2000-2005	-0,871
1.7 Gasto en salud. Per cápita (PPA en USD). 2001	0,674
1.8 Niños de un año totalmente inmunizados contra la tuberculosis (%). 2002	0,619
1.9 Niños de un año totalmente inmunizados. Contra el sarampión (%). 2002	0,706
1.10 Tasa de uso de anticonceptivos (%). 1995-2002	0,813
1.11 Partos atendidos por personal sanitario especializado (%). 1995-2002	0,847
1.12 Médicos (por cada 100000 habitantes). 1990-2003	0,713
1.13 Población con acceso sostenible a saneamiento mejorado (%). 2000	0,670
1.14 Población con acceso sostenible a fuente de agua mejorada (%). 2000	0,708
1.15 Personas desnutridas (\$ de la población total). 1999-2001	-0,641
1.16 Niños menores 5 años con peso menor media para su edad. 1995-2002	-0,732
1.17 Niños menores 5 años con altura menor media para su edad. 1995-2002	-0,793
1.18 Niños con peso inferior a la media al nacer (%). 1998-2002	-0,607
1.19 Casos de tuberculosis. Por cada 100000 habitantes. 2002	-0,799
1.20 Tasa de mortalidad infantil (por cada 1000 nacidos vivos). 2002	-0,929
1.21 Tasa mortalidad niños menores 5 años, por 1000 nacidos vivos. 2002	-0,922
1.22 Probabilidad al nacer sobrevivir a 65 años. Mujeres. 2000-2005	0,900
1.23 Probabilidad al nacer sobrevivir a 65 años. Hombres. 2000-2005	0,871
1.24 Mortalidad materna. Tasa informada por 10 <sup>5</sup> nacidos vivos. 1985-2002	-0,847
1.25 Mortalidad materna. Tasa ajustada por 10 <sup>5</sup> nacidos vivos). 2002	-0,864
<b>2 DIMENSIÓN: CONOCIMIENTOS</b>	
2.1 Tasa de alfabetización de adultos (% de 15 años y mayores). 2002	0,852
2.2 Tasa bruta combinada de matriculación (%). 2001/02	0,874
2.3 Tasa de alfabetización de jóvenes (% edades 15 a 24 años). 2002	0,787
2.4 Tasa neta de matriculación en educación primaria (%). 2001-2001	0,806
2.5 Tasa neta de matriculación en educación secundaria (%). 2001-2001	0,906
2.6 Niños que llegan al 5º año (% años de estudio por alumno). 2000-2001	0,670
2.7 Líneas telefónicas básicas (por 1000 habitantes). 2002	0,802
2.8 Abonados a teléfonos móviles (por 1000 habitantes). 2002	0,742
2.9 Usuarios de Internet (por 1000 habitantes). 2002	0,701
2.10 Investigadores en I+ D (por 1000000 habitantes). 1990-2001	0,606
2.11 Matricula primaria neta. Tasa femenina sobre masculina. 2000-2001	0,637
2.12 Matricula secundaria neta. Tasa femenina sobre masculina. 2000-2001	0,550
2.13 Matricula terciaria neta. Tasa femenina sobre masculina. 2000-2001	0,673
2.14 Tasa alfabetización adultos (% de 15 años y mayores). Mujeres. 2002	0,849

2.15 Tasa alfabetización adultos (% de 15 años y mayores). Hombres. 2002	0,821
2.16 Tasa bruta combinada de matriculación (%). Mujeres. 2001/02	0,892
2.17 Tasa bruta combinada de matriculación (%). Hombres. 2001/02	0,853
2.18 Matriculación ternaria neta. Tasa femenina (%). 2000/01	0,769
2.19 Matriculación secundaria neta. Tasa femenina (%). 2000/01	0,909
2.20 Matriculación primaria neta. Tasa femenina (%). 2000/01	0,817
<b>3 DIMENSIÓN: NIVEL DE VIDA</b>	
3.1 PIB per cápita. PPA USD. 2002 (dato del IDH)	0,729
3.2 PIB per cápita. USD. 2002	0,646
3.3 Exportación productos primarios. % mercancías. 2002	-0,542
3.4 AOD % del PIB. 2002	0,577
3.5 Gasto público en salud (% del PIB). 2001	0,604
3.6 Consumo tradicional combustible, % total necesidades energéticas. 2001	-0,847
3.7 Consumo de electricidad per cápita (kw/h). 2001	0,617
3.8 Estimación de los ingresos percibidos (PPP en USD). Mujeres. 2002	0,731
3.9 Estimación de los ingresos percibidos (PPP en USD). Hombres. 2002	0,727
3.10 Empleo femenino en agricultura (%). 1995-2002	-0,605
3.11 Empleo femenino en servicios (%). 1995-2002	0,548

La información original presentaba lagunas para algunas variables y países, poniendo una vez más de manifiesto la necesidad de disponer de estadísticas completas y homologables en todos los países para mejorar así la calidad de los indicadores, estudios y mediciones realizadas con ellas. A fin de completar las lagunas de información se procedió a su estimación a partir de las siguientes expresiones:

$$X_{ijN}^* = \frac{IDH_N}{IDH_N} \times X_N^* \quad \text{ó} \quad X_{ijN}^* = \frac{IDH_N}{IDH_N} \times X_N^*$$

según que la relación de la característica a estimar con el desarrollo humano fuera de signo positivo o negativo, respectivamente.

En aquellos casos en los que  $X_{iN}$  no se conociera, las expresiones respectivas fueron:

$$X_{ijN}^* = \frac{IDH_N}{IDH_N} \times \frac{\sum_{k \in N} X_{ikN}^*}{n_N} \quad \text{ó} \quad X_{ijN}^* = \frac{IDH_N}{IDH_N} \times \frac{\sum_{k \in N} X_{ikN}^*}{n_N}$$

donde:

- $X_{ijN}$  es la característica a estimar desconocida para el país  $j$ , que pertenece al conjunto de países de nivel de desarrollo  $N=alto, medio o bajo$ , y para alguna característica  $i$ ;
- $X_{ikN}$  es la característica conocida del país  $k$  que pertenece al conjunto de países de nivel de desarrollo  $N$  y para alguna característica  $i$ ;
- $n_{iN}$  es el número de países de nivel de desarrollo  $N$  para los que se conoce el valor de la característica  $i$ ;

- $X_{iN}$  es el valor de la característica  $i$  para el conjunto de países que pertenecen al nivel de desarrollo humano  $N$ ;
- $IDH_{jN}$  es el Índice de Desarrollo Humano del país  $j$  que pertenece al nivel de desarrollo humano  $N$ ;
- $IDH_N$  es el Índice de Desarrollo Humano del conjunto de países que pertenecen al nivel de desarrollo humano  $N$ .

Una vez se dispone de la información completa para todas las características consideradas y para los 177 países estudiados, se procede a transformarla según la expresión [1] y a clasificarla, valor por valor transformado, en uno de los niveles  $C_1$ ,  $C_2$  o  $C_3$  definidos con anterioridad. A fin de soslayar la posible existencia de valores outliers, cuyo efecto sería la existencia de uno o pocos más valores en alguna de las categorías extremas anteriores, se procede a no considerar su valor como máximo o mínimo en la transformación anterior, si bien queda clasificado en el nivel  $C_1$  ó  $C_3$  que le corresponde. Este proceso es iterativo, en caso necesario, hasta asegurar la existencia de al menos cinco países en las categorías extremas  $C_1$  y  $C_3$ . En la aplicación realizada, este hecho se ha producido en dos variables de la dimensión longevidad –gasto en salud per cápita y número de médicos por cien mil habitantes–; en cuatro variables de la dimensión conocimientos –usuarios de Internet, investigadores en I+D y en las tasas femenina respecto la masculina en la matriculación neta tanto en secundaria como en terciaria–; y, para la dimensión nivel de vida, en las cinco características siguientes: PIB per cápita (tanto en USD como en PPA), consumo de electricidad per cápita, y en la estimación de los ingresos percibidos, tanto por hombres como por mujeres.

La Tabla 2 relaciona los países, respetando la ordenación según su *IDH-ordenado* respectivo y por continentes, con expresión de los índices de desarrollo correspondientes a las tres dimensiones, y de la media aritmética de éstos que define el *IDH-ordenado*.

**Tabla 2. IDH-ordenado**

Posición según IDH-ordenado	País	IDH-ordenado longevidad	IDH-ordenado conocimientos	IDH-ordenado nivel de vida	IDH-ordenado	Posición según IDH
EUROPA						
1	Sweden	0,987	0,989	0,908	0,962	2
2	Norway	0,980	0,969	0,907	0,952	1
4	Finland	0,980	0,969	0,819	0,923	13
5	Luxembourg	0,987	0,783	0,987	0,919	15
6	Iceland	0,961	0,902	0,888	0,917	7
7	Denmark	0,980	0,879	0,862	0,907	17
10	Belgium	0,987	0,879	0,746	0,871	6
11	United Kingdom	0,950	0,902	0,746	0,866	12
12	Switzerland	0,987	0,742	0,831	0,853	11
13	France	0,961	0,791	0,792	0,848	16
14	Germany	0,993	0,752	0,792	0,846	19
15	Ireland	0,961	0,712	0,862	0,845	10

16	Netherlands	0,971	0,836	0,691	0,833	5
17	Austria	0,971	0,717	0,792	0,827	14
19	Italy	0,980	0,783	0,691	0,818	21
23	Spain	0,950	0,742	0,605	0,766	20
25	Slovenia	0,860	0,783	0,493	0,712	27
26	Estonia	0,924	0,793	0,382	0,700	36
27	Greece	0,943	0,679	0,440	0,687	24
29	Malta	0,897	0,712	0,431	0,680	31
31	Czech Republic	0,943	0,604	0,473	0,673	32
32	Portugal	0,934	0,642	0,431	0,669	26
35	Croatia	0,943	0,565	0,431	0,646	48
36	Hungary	0,900	0,606	0,431	0,645	38
37	Slovakia	0,924	0,570	0,431	0,642	42
39	Poland	0,887	0,635	0,382	0,635	37
40	Lithuania	0,934	0,635	0,326	0,632	41
43	Russian Federation	0,900	0,673	0,273	0,615	57
48	Latvia	0,924	0,604	0,273	0,600	50
50	Belarus	0,886	0,570	0,324	0,593	62
51	Ukraine	0,913	0,532	0,326	0,590	70
53	Macedonia, TFYR	0,876	0,535	0,324	0,578	60
59	Bulgaria	0,834	0,567	0,273	0,558	56
63	Bosnia and Herzegovina	0,851	0,531	0,273	0,551	66
66	Albania	0,744	0,567	0,326	0,546	65
73	Romania	0,764	0,535	0,273	0,524	69
95	Moldova, Rep. of	0,840	0,365	0,139	0,448	113
AMERICA DEL NORTE						
3	United States	0,971	0,836	0,968	0,925	8
8	Canada	0,943	0,836	0,941	0,907	4
58	Mexico	0,748	0,558	0,371	0,559	53
AMERICA CENTRAL Y EL CARIBE						
33	Barbados	0,851	0,742	0,382	0,658	29
44	Saint Kitts and Nevis	0,828	0,790	0,225	0,614	39
45	Cuba	0,950	0,567	0,324	0,613	52
49	Jamaica	0,792	0,635	0,371	0,599	79
56	Costa Rica	0,840	0,465	0,382	0,562	45
57	Panama	0,764	0,596	0,326	0,562	61
64	Bahamas	0,799	0,532	0,315	0,549	51
65	Antigua and Barbuda	0,828	0,488	0,326	0,547	55
72	Saint Lucia	0,792	0,558	0,225	0,525	71
74	Trinidad and Tobago	0,730	0,484	0,315	0,510	54
77	Dominican Republic	0,690	0,459	0,315	0,488	98
79	Dominica	0,828	0,409	0,208	0,482	95
86	Grenada	0,748	0,365	0,273	0,462	93
92	Belize	0,680	0,409	0,273	0,454	99
94	Saint Vincent and the Grenadines	0,814	0,364	0,167	0,448	87
113	El Salvador	0,690	0,178	0,273	0,380	103

120	Honduras	0,585	0,254	0,129	0,322	115
122	Nicaragua	0,641	0,207	0,055	0,301	118
127	Guatemala	0,473	0,074	0,180	0,242	121
157	Haiti	0,067	0,018	0,129	0,071	153
AMERICA DEL SUR						
41	Uruguay	0,943	0,604	0,326	0,624	46
42	Argentina	0,887	0,604	0,371	0,621	34
47	Suriname	0,711	0,623	0,473	0,602	67
62	Brazil	0,814	0,567	0,273	0,552	72
70	Venezuela	0,731	0,567	0,315	0,538	68
71	Chile	0,851	0,465	0,273	0,530	43
81	Colombia	0,799	0,365	0,273	0,479	73
84	Guyana	0,678	0,567	0,167	0,471	104
88	Peru	0,641	0,465	0,273	0,460	85
93	Ecuador	0,641	0,495	0,225	0,454	100
102	Paraguay	0,658	0,465	0,167	0,430	89
115	Bolivia	0,365	0,465	0,273	0,368	114
AUSTRALIA Y OCEANIA						
9	Australia	0,971	0,923	0,746	0,880	3
20	New Zealand	0,934	0,896	0,623	0,818	18
83	Tonga	0,678	0,535	0,208	0,474	63
85	Samoa (Western)	0,714	0,531	0,146	0,464	75
98	Fiji	0,595	0,567	0,167	0,443	81
123	Vanuatu	0,595	0,249	0,032	0,292	129
131	Solomon Islands	0,470	0,074	0,082	0,209	124
139	Papua New Guinea	0,252	0,061	0,094	0,136	133
156	Timor-Leste	0,100	0,104	0,032	0,079	158
ASIA						
18	Japan	0,943	0,769	0,746	0,819	9
21	Israel	0,924	0,783	0,623	0,777	22
22	Hong Kong, China (SAR)	0,897	0,673	0,746	0,772	23
24	Singapore	0,851	0,717	0,675	0,747	25
28	Cyprus	0,913	0,769	0,371	0,684	30
30	Korea, Rep. of	0,840	0,811	0,371	0,674	28
34	Brunei Darussalam	0,814	0,570	0,562	0,649	33
46	Qatar	0,757	0,567	0,493	0,606	47
52	Bahrain	0,792	0,641	0,326	0,587	40
54	Kuwait	0,779	0,498	0,431	0,569	44
55	Lebanon	0,887	0,532	0,273	0,564	80
60	Malaysia	0,731	0,570	0,371	0,557	59
61	United Arab Emirates	0,730	0,379	0,557	0,555	49
69	Jordan	0,730	0,567	0,324	0,540	90
75	China	0,636	0,558	0,326	0,507	94
76	Armenia	0,799	0,457	0,208	0,488	82
80	Kazakhstan	0,817	0,457	0,167	0,480	78
82	Thailand	0,711	0,498	0,224	0,478	76
89	Georgia	0,828	0,457	0,094	0,459	97



90	Turkmenistan	0,641	0,567	0,167	0,458	86
91	Philippines	0,527	0,567	0,273	0,456	83
96	Azerbaijan	0,698	0,457	0,180	0,445	91
97	Iran, Islamic Rep. of	0,779	0,327	0,225	0,444	101
99	Uzbekistan	0,636	0,457	0,225	0,439	107
100	Occupied Palestinian Territories	0,709	0,531	0,055	0,432	102
103	Turkey	0,698	0,353	0,224	0,425	88
104	Mongolia	0,555	0,500	0,208	0,421	117
105	Syrian Arab Republic	0,664	0,364	0,225	0,418	106
106	Maldives	0,473	0,495	0,273	0,413	84
107	Sri Lanka	0,664	0,431	0,129	0,408	96
108	Kyrgyzstan	0,667	0,409	0,094	0,390	110
111	Oman	0,613	0,365	0,167	0,382	74
112	Viet Nam	0,552	0,424	0,167	0,381	112
114	Saudi Arabia	0,695	0,219	0,225	0,380	77
119	Indonesia	0,462	0,332	0,208	0,334	111
121	Tajikistan	0,413	0,431	0,082	0,309	116
125	Myanmar	0,377	0,306	0,094	0,259	132
134	Bangladesh	0,296	0,071	0,139	0,168	138
138	India	0,121	0,061	0,225	0,136	127
140	Nepal	0,252	0,049	0,094	0,132	140
142	Pakistan	0,169	0,011	0,180	0,120	142
143	Bhutan	0,252	0,071	0,032	0,118	134
144	Yemen	0,182	0,018	0,139	0,113	149
161	Cambodia	0,057	0,074	0,032	0,054	130
162	Lao People's Dem. Rep.	0,057	0,061	0,032	0,050	135
AFRICA						
38	Seychelles	0,840	0,702	0,382	0,641	35
67	Tunisia	0,828	0,426	0,382	0,545	92
68	Libyan Arab Jamahiriya	0,779	0,570	0,273	0,541	58
78	Mauritius	0,731	0,500	0,225	0,485	64
87	Algeria	0,731	0,426	0,225	0,460	108
101	South Africa	0,500	0,465	0,326	0,430	119
109	Botswana	0,418	0,365	0,382	0,388	128
110	Egypt	0,658	0,219	0,273	0,383	120
116	Cape Verde	0,614	0,400	0,082	0,365	105
117	Morocco	0,641	0,049	0,326	0,339	125
118	Namibia	0,296	0,459	0,251	0,335	126
124	Gabon	0,377	0,278	0,167	0,274	122
126	São Tomé and Príncipe	0,437	0,249	0,055	0,247	123
128	Equatorial Guinea	0,149	0,194	0,382	0,242	109
129	Kenya	0,200	0,277	0,180	0,219	148
130	Swaziland	0,247	0,271	0,129	0,216	137
132	Zimbabwe	0,121	0,306	0,129	0,185	147
133	Ghana	0,337	0,104	0,094	0,178	131
135	Lesotho	0,110	0,271	0,082	0,154	145

136	Nigeria	0,087	0,104	0,224	0,138	151
137	Comoros	0,340	0,018	0,055	0,138	136
141	Togo	0,057	0,159	0,167	0,128	143
145	Sudan	0,184	0,038	0,094	0,105	139
146	Djibouti	0,224	0,038	0,032	0,098	154
147	Congo	0,067	0,169	0,055	0,097	144
148	Madagascar	0,057	0,140	0,094	0,097	150
149	Benin	0,216	0,011	0,064	0,097	161
150	Tanzania, U. Rep. of	0,133	0,140	0,013	0,095	162
151	Uganda	0,140	0,074	0,055	0,090	146
152	Gambia	0,200	0,038	0,032	0,090	155
153	Zambia	0,100	0,140	0,013	0,084	164
154	Senegal	0,110	0,011	0,129	0,083	157
155	Rwanda	0,051	0,162	0,032	0,081	159
158	Cameroon	0,067	0,038	0,094	0,066	141
159	Mauritania	0,149	0,004	0,032	0,062	152
160	Côte d'Ivoire	0,100	0,018	0,064	0,061	163
163	Malawi	0,048	0,087	0,013	0,050	165
164	Eritrea	0,100	0,027	0,013	0,047	156
165	Guinea	0,057	0,018	0,064	0,047	160
166	Burundi	0,100	0,004	0,013	0,039	173
167	Angola	0,032	0,011	0,064	0,035	166
168	Central African Republic	0,025	0,004	0,064	0,031	169
169	Burkina Faso	0,075	0,000	0,013	0,029	175
170	Congo, Dem. Rep. of the	0,018	0,027	0,013	0,020	168
171	Chad	0,032	0,004	0,013	0,016	167
172	Ethiopia	0,032	0,000	0,013	0,015	170
173	Mozambique	0,025	0,018	0,000	0,014	171
174	Mali	0,025	0,004	0,013	0,014	174
175	Niger	0,018	0,004	0,013	0,012	176
176	Guinea-Bissau	0,018	0,000	0,000	0,006	172
177	Sierra Leone	0,007	0,000	0,000	0,002	177

Como era esperable, las correlaciones entre los índices de desarrollo de las tres dimensiones son altas, como se aprecia en la Tabla 3:

**Tabla 3. Correlaciones entre los IDH-ordenados de las tres dimensiones**

	Longevidad	Conocimientos	Nivel de vida
Longevidad	1,000	0,890	0,736
Conocimientos	0,890	1,000	0,821
Nivel de vida	0,736	0,821	1,000

Las dos ordenaciones –la del IDH de la ONU y la obtenida a través del IDH-ordenado de la tabla 2- presentan también una alta correlación: su coeficiente de correlación por rangos de Spearman toma el valor 0,977, confirmando de esta forma que ambos indicadores, el de la ONU y el desarrollado en este trabajo, están midiendo un mismo concepto de desarrollo humano. No obstante, existen algunas discrepancias que deben comentarse. En la Tabla 4 aparece explicitada la distribución de frecuencias de las discrepancias absolutas, definidas éstas como la diferencia de posición entre las ordenaciones derivadas de ambos índices (diferencia de las columnas primera y última de la Tabla 2):

**Tabla 4. Distribución de frecuencias de las discrepancias absolutas entre las ordenaciones derivadas del IDH y del IDH-ordenado**

Discrepancia	$n_i$	$N_i$	$f_i \times 100$	$F_i \times 100$
0	5	5	2,82	2,82
1 a 5	82	87	46,33	49,15
6 a 10	44	131	24,86	74,01
11 a 15	20	151	11,30	85,31
16 a 20	14	165	7,91	93,22
21 a 25	6	171	3,39	96,61
26 a 30	3	174	1,69	98,30
31 a 35	1	175	0,57	98,87
35 a 40	2	177	1,13	100
	177		100	

Casi el 50% de los países tienen práctica coincidencia de clasificación –discrepancia no superior a 5 puestos en la ordenación-. Junto con los países para los que esa discrepancia es pequeña –discrepancias absolutas no superiores a 10 puestos-, llegan a alcanzar al 74% de ellos. Las mayores discrepancias –superiores a veinticinco posiciones en la ordenación- se producen sólo en seis países. Dos países del Golfo Pérsico, Omán (posición 74 para el IDH y 111 para el IDH-ordenado) y Arabia Saudí (posición 77 según el IDH y 114 del IDH-ordenado), son los países que presenta la mayor discrepancia, con 37 posiciones de diferencia. Los otros cuatro son Camboya (130 para el IDH y 161 para el IDH-ordenado); Jamaica (79 según el IDH y 49 para el IDH-ordenado); Chile (posición 43 para el IDH y 71 según el IDH-ordenado); y Laos (135 para el IDH y 162 para el IDH-ordenado). Salvo Jamaica todos los países citados empeoran su posición con el IDH-ordenado.

Es interesante comprobar cómo las mayores discrepancias entre ordenaciones se producen, precisamente, en los países con un desarrollo humano clasificado en posiciones intermedias. Esto es, tanto los países con alto como con bajo desarrollo humano presentan clasificaciones más parecidas según los dos índices aquí comparados que los de desarrollo humano medio. La Tabla 5 pone de manifiesto este hecho.

**Tabla 5. Discrepancias de clasificación según IDH e IDH-ordenado por desarrollo humano de los países**

Discrepancias de clasificación según IDH e IDH-ordenado	Nº países de desarrollo alto	Nº países de desarrollo medio	Nº países de desarrollo bajo	Total
0	0	2	3	5
1	12	6	3	21
2	9	6	7	22
3	5	4	4	13
4	3	6	4	13
5	7	3	3	13
6	2	6	1	9
7	1	8	2	11
8	1	7	2	10
9	2	1	0	3
10	5	5	1	11
11	2	3	1	6
12	2	1	2	5
13	2	2	0	4
14	0	2	0	2
15	0	1	2	3
16	0	1	0	1
17	0	2	0	2
18	0	2	0	2
19	0	4	1	5
20	1	3	0	4
21	0	3	0	3
22	0	1	0	1
25	0	2	0	2
27	0	1	0	1
28	1	0	0	1
30	0	1	0	1
31	0	1	0	1
37	0	2	0	2
Total	55	86	36	177

Y así, entre los países de alto desarrollo humano, Chile (con una discrepancia de 28 posiciones) y Trinidad y Tobago (con 20 posiciones de discrepancia) son los que experimentan peor clasificación en el IDH-ordenado en comparación con la que ocupan según el IDH. Respecto a los países de menor desarrollo, la mayor discrepancia –con 19 posiciones– se produce en Kenya, que mejora su situación con el nuevo IDH-ordenado. El resto de discrepancias mayores se producen en los países clasificados por el IDH como de desarrollo medio, para los que los criterios de clasificación presentan mayor sensibilidad a la naturaleza y cantidad de la información estadística disponible.

Así pues, la estabilidad de las clasificaciones para los países de alto o bajo desarrollo, frente a los de un desarrollo intermedio, confirma su validez para aquéllos. Puede, pues, concluirse que la validez de las ordenaciones según un índice de desarrollo humano tiene pleno sentido en una comparación fundamentalmente dicotómica: la realizada sobre la posición y situación de los países más adelantados frente a la de los países más retrasados.

La clasificación con ambos indicadores produce saltos de categoría para algunos de los países. Para la aplicación propuesta en este trabajo, y teniendo en cuenta que según el IDH hay 55 países de desarrollo alto (0'8 = valor percentil 69'5%), 86 con desarrollo medio (0'5 = valor percentil 20'6%) y 36 con desarrollo bajo, la Tabla 6 recoge esta comparación, detallándose por categorías el número de países con igual clasificación para ambos índices, y los saltos experimentados en la clasificación de algunos de ellos.

**Tabla 6. Coincidencias de clasificación entre el IDH y el IDH-ordenado**

	Desarrollo alto	Desarrollo medio	Desarrollo bajo	Total
Desarrollo alto	48	7	0	55
Desarrollo medio	7	74	5	86
Desarrollo bajo	0	5	31	36
Total	55	86	36	177

El número total de coincidencias en las tres categorías de desarrollo es 153, lo que representa más del 86% de países igualmente clasificados en las tres categorías básicas de alta, media y baja, frente el casi 8% de países que intercambian su clasificación entre desarrollos humanos alto y medio, y el 6% restante que intercambia su posición entre desarrollos humanos medio y bajo. Los valores del IDH-ordenado que definen, en nuestra aplicación, los niveles de desarrollo humano alto y medio frontera son, respectivamente:

$$\text{Límite\_frontera DA/DA IDH - ordenado} = \text{Percentil}(\text{Valor\_percentil}(\text{IDH} = 0'8)) = 0'564$$

$$\text{Límite\_frontera DM/DB IDH - ordenado} = \text{Percentil}(\text{Valor\_percentil}(\text{IDH} = 0'5)) = 0'128$$

Las demás alteraciones se producen por la diferente posición de clasificación de los países dentro de cada una de las tres categorías de desarrollo alto, medio o bajo. El uso de mayor cantidad de información estadística relacionada con los distintos aspectos del desarrollo humano proporciona a través del IDH-ordenado una clasificación que, creemos, es más acorde con la realidad que la excesivamente simplificada –aunque de cálculo más sencillo– del IDH definido en los Informes sobre Desarrollo Humano de la ONU.

## 6. CONCLUSIONES

Es la mayor riqueza informativa la que motiva el que el IDH-ordenado se profile como un indicador más sensible para la medición del desarrollo humano que el IDH de las Naciones Unidas. En efecto, intervienen en su cálculo más variables estadísticas, todas ellas agrupadas dentro de las tres dimensiones del desarrollo humano. El escalonamiento entre ellas que es respetado en el diseño del índice consigue que no influya en la ordenación final la comparación entre el número de variables de cada dimensión, lo que asegura que no exista sobrerrepresentación de ninguna de ellas.

La mayor riqueza informativa permite graduar situaciones intermedias no alcanzables por el IDH, dado que las pocas variables que intervienen en la definición de éste no llegan a alcanzar la necesaria sensibilidad para detectar diferencias entre situaciones de desarrollo muy cercanas. Por ello, la utilidad del IDH-ordenado se manifiesta más intensamente en aquellas situaciones de desarrollo humano intermedio, en cuanto que los desarrollos extremos –altos o bajos- resultan siempre más evidentes, incluso a simple vista.

Frente a esas dos ventajas, es evidente que el IDH-ordenado es de cálculo más complejo y, sobre todo, exige por su misma construcción más información estadística. Por ello es también evidente que resulta más sensible a la calidad del dato estadístico. De ahí que los problemas tantas veces denunciados por la ONU sobre la necesaria calidad y homogeneización de la información estadística de los países miembros cobra en el IDH-ordenado mayor relevancia.

## 7. FUENTES Y BIBLIOGRAFÍA

### 7.1 Principales fuentes de datos primarios utilizadas en el IDH

- Banco Mundial. *Indicadores del desarrollo mundial*.
- Carbon Dioxide Information Analysis Center (CDIAC). *Emisiones de dióxido de carbono*.
- Comisión Económica para Europa de Naciones Unidas (CEPE). *Informe Anual, indicadores sobre desempleo*.
- Conferencia Naciones Unidas sobre Comercio y Desarrollo (UNCTAD). *World Investment Report*.
- División de Estadística de las Naciones Unidas. *Publicaciones varias*.
- División de Población de las Naciones Unidas. *Previsiones demográficas mundiales y World Urbanization Prospects*.
- Fondo de las Naciones Unidas para la Infancia (UNICEF). *Estado Mundial de la Infancia*.
- FMI. *Transacciones financieras internacionales y balanza de pagos*.

- Instituto de Recursos Mundiales. World Resources.
- Luxembourg Income Study (LIS). Estimaciones de la pobreza de ingreso.
- OCDE. Ayuda internacional, empleo y analfabetismo funcional.
- FAO. Producción y suministro de alimentos.
- UNESCO. Anuario estadístico e Informe Mundial sobre Educación.
- Organización Internacional del Trabajo (OIT). Anuario de Estadísticas del Trabajo.
- Organización Mundial de la Salud (OMS). Salud y enfermedades.
- Programa Conjunto de las Naciones Unidas sobre el VIH/SIDA (ONUSIDA) y Organización Mundial de la Salud (OMS). Report on the Global HIV/AIDS Epidemic.
- Unión Internacional de Telecomunicaciones (UIT). World Telecommunications Indicators.

## 7.2 Bibliografía

- BEAMONTE, E. ET AL (2004) Un indicador global para la calidad del agua. Aplicación a las aguas superficiales de la Comunidad Valenciana, Estadística Española, vol. 46, 156, pp. 357-384.
- BLANCHFLOWER, D.G.; OSWALD, A.J. (2005): "Happiness and the Human Development Index: The paradox of Australia", Australian Economic Review. 38, pp. 307-18.
- CHAKRAVARTY, S.R. (2003): "A Generalized Human Development Index", Review of Development Economics, 7(1), pp. 99-114.
- CHOWDHURY, S.; SQUIRE, L. (2006): "Setting weights for aggregate indices: An application to the commitment to development index and human development index", Journal of Development Studies, 42(5);, pp. 761-771.
- EMES, J. (2001) Measuring Development: An Index of Human Progress (Vancouver, the Fraser Institute)
- FREDERICK S. PARDEE CENTER (2005) Proyecto MakeYourOwnIndex (Boston University)
- IVIE & BANCAJA (2005). El Índice de Desarrollo Humano en España, 1981-2000, en: Capital Humano, 49 (Valencia)
- LEIGH, A.; WOLFERS, J. (2006): "Happiness and the Human Development Index: Australia is not a Paradox", Australian Economic Review, 39(2), pp. 176-84.
- MORSE S. (2003): "For better or for worse, till the human development index do us part?", Ecological Economics, 45(2), pp. 281-296.
- ONU (2000). Informe sobre Desarrollo Humano 2000, en: Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (New York).

ONU (2004). Informe sobre Desarrollo Humano 2004, en: Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (New York)

RANIS, G.; STEWART, F.; SAMMAN, E. (2006): "Human Development: Beyond the Human Development Index", *Journal of Human Development*, 7(3): 323-358.



## ANEXO MATEMATICO

Sea  $C_k^p$  el subconjunto de  $N^p$  cuyas componentes suman  $k$ . Esto es,  $C_k^p = \left\{ (a_1, a_2, \dots, a_p) : \sum_{i=1}^p a_i = k, a_i \in N \right\}$ . Nuestro objetivo es establecer una relación de orden total en ese conjunto, y construir la biyección que asigne a cada elemento de  $C_k^p$  su número de orden. Estamos interesados particularmente en  $C_k^3$ . La relación de orden se puede establecer mediante la siguiente definición.

**Definición 6.** *Dados dos elementos cualesquiera del conjunto  $C_k^p$ ,  $a = (a_1, \dots, a_p)$  y  $b = (b_1, \dots, b_p)$ , diremos que  $a$  es menor que  $b$ ,  $a < b$ , si y sólo si:*

$$(a_p > b_p) \vee (a_p = b_p \wedge a_{p-1} > b_{p-1}) \vee \dots \vee (a_p = b_p \wedge \dots \wedge a_3 = b_3 \wedge a_2 > b_2).$$

La propia definición anterior muestra el algoritmo para realizar las comparaciones, y es evidente que cualquier par de elementos de  $C_k^p$  es comparable. Por tanto es una relación de orden total y definida sobre un conjunto finito, por lo que existe máximo y mínimo en el conjunto  $C_k^p$ . El mínimo es el elemento  $e_{(1)} \in C_k^p$  tal que  $e_{(1)} < e \forall e \in C_k^p$ , y es inmediato comprobar que  $e_{(1)} = (0, \dots, 0, k)$ . De manera similar se puede definir el máximo, que resulta ser  $(k, \dots, 0, 0)$ .

La Definición 6 permite construir una aplicación biyectiva entre el conjunto  $C_k^p$  y el subconjunto de números naturales  $\{j \in N, \text{ tal que } 1 \leq j \leq \#C_k^p\}$ , siendo  $\#C_k^p$  el cardinal del conjunto  $C_k^p$ .

**Definición 7.** *El índice del elemento  $e \in C_k^p$ ,  $I_{p,k}(e)$  es el rango que ocupa al ordenar, de menor a mayor, todos los elementos del conjunto  $C_k^p$  siguiendo la Definición 6.*

Esta última definición no es operativa, no incorpora un algoritmo que permita calcular el valor de  $I_{p,k}(e)$  para un vector dado  $e \in C_k^p$ . Mucho menos la aplicación inversa para un entero  $i$  dado,  $I_{p,k}^{-1}(i)$ , con  $0 \leq i \leq \#C_k^p$ , que coincide con el rango del mayor elemento de dicho conjunto.

Para construir esos algoritmos necesitamos algunos resultados sencillos previos. Como nos interesa especialmente el estudio del conjunto  $C_k^3$ , a partir de ahora vamos a interesarnos tan sólo en dimensiones menores o iguales a 3. Vamos a empezar obteniendo el cardinal de esos conjuntos.

Obviamente  $\#C_k^1 = 1$  pues el conjunto  $C_k^1$  está constituido por un único elemento,  $C_k^1 = \{(k)\}$ . También de manera inmediata se obtiene  $\#C_k^2 = k + 1$ , dado que  $C_k^2 = \{(0,k), (1,k-1), \dots, (k,0)\}$ , donde ya se presentan ordenados de menor a mayor todos los elementos de  $C_k^2$ . El cálculo del cardinal del conjunto  $C_k^3$  es el objeto de la siguiente proposición.

**Proposición 1.** El cardinal del conjunto  $C_k^3$  es  $\#C_k^3 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ .

*Demostración.* Hemos de contar el número posible de vectores  $(a_1, a_2, a_3)$ , donde las tres componentes son números naturales que suman  $k$ . El valor de  $a_1$  puede variar en el conjunto  $\{0, 1, \dots, k\}$ , pero si  $a_1 = n$ ,  $a_2$  sólo puede tomar uno de los valores  $\{0, 1, \dots, k-n\}$ , y  $a_3$  sólo puede tomar un valor:  $k - a_1 - a_2$ . Así pues, con  $a_1 = n$  sólo hay  $k - n + 1$  elementos en el conjunto  $C_k^3$ , por lo que su cardinal es:

$$\sum_{n=0}^k (k - n + 1) = \frac{1}{2}(k+2)(k+1)$$

lo que demuestra la proposición (c.q.d.).

El máximo del conjunto  $C_k^3$  es el vector  $(k, 0, 0)$ , cuyo rango debe coincidir con el cardinal de  $C_k^3$ . Por tanto, la proposición 1 nos permite calcular el índice de ese elemento, que es el mayor índice posible:

$$I_{3,k}(k, 0, 0) = \frac{1}{2}(k+2)(k+1)$$

A continuación vamos a calcular rangos de algunos elementos intermedios. Para ello, demostremos los siguientes resultados.

**Proposición 2.** Sea  $C_{n,k}^2$  el subconjunto de  $C_k^2$  formado por todos aquellos elementos  $e = (a_1, a_2)$  para los que  $a_2 \geq n$ . El cardinal de  $C_{n,k}^2$  es:

$$\#C_{n,k}^2 = (k - n + 1)$$

*Demostración.* Fijado un valor para  $a_2 = r$  existen un único valor para  $a_1 = k - r$ , como ya vimos en la demostración de la proposición 1. Por tanto, el cardinal de  $C_{n,k}^2$  se calcula como:

$$\sum_{r=n}^k r = k - n + 1$$

lo que demuestra la proposición (c.q.d.).

**Proposición 3.** Sea  $C_{n,k}^3$  el subconjunto de  $C_k^3$  formado por todos aquellos elementos  $e = (a_1, a_2, a_3)$  para los que  $a_3 \geq n$ . El cardinal de  $C_{n,k}^3$  es:

$$\#C_{n,k}^3 = \frac{1}{2}(k - n + 1)(k - n + 2)$$

*Demostración.* Con  $a_3 = r$  existen  $k - r + 1$  elementos en  $C_k^3$ , como ya vimos en la demostración de la proposición 1. Por tanto, el cardinal de  $C_{n,k}^3$  se puede calcular como:

$$\sum_{r=n}^k (k - r + 1) = (k - n + 1)(k + 1) - \frac{1}{2}(k - n + 1)(k + n) = \frac{1}{2}(k - n + 1)(k - n + 2)$$

lo que demuestra la proposición (c.q.d.).

El subconjunto  $C_{n,k}^3$  considerado en la última proposición incluye a todos los elementos con los menores índices del conjunto  $C_k^3$ . Por tanto nos permite calcular los índices de algunos elementos concretos de  $C_k^3$ . Así, de la Definición 6 se deduce que, si  $n$  es tal que  $0 \leq n \leq k$ ,  $(k - n, 0, n)$  es el máximo del conjunto  $C_{n,k}^3$ , por tanto su índice debe coincidir con el cardinal de dicho conjunto:

$$I_{3,k}(k - n, 0, n) = \frac{1}{2}(k - n + 1)(k - n + 2), \quad \text{si } 0 \leq n \leq k$$

Estos resultados permiten ya obtener un método sencillo para el cálculo del índice de  $C_k^3$ .

**Teorema 1.** Sea  $e = (e_1, e_2, e_3)$  un elemento cualquiera de  $C_k^3$ . Si definimos  $k_1 = k - e_3 = e_1 + e_2$  entonces:

$$I_{3,k}(e) = \frac{1}{2}(k_1^2 + k_1) + e_1 + 1.$$

*Demostración.*  $I_{3,k}(e)$  puede calcularse contando todos los elementos menores a  $e$ , que son: los que tienen tercera componente mayor que  $e_3$ , que son todos los del conjunto  $C_{e_3+1,k}^3$ ; y los que teniendo la tercera componente igual a  $e_3$  tienen la segunda componente mayor que  $e_2$ , que forman un conjunto equivalente a  $C_{e_2+1,k-e_3}^2$ . Por tanto:

$$I_{3,k}(e) = \#C_{e_3+1,k}^3 + \#C_{e_2+1,k-e_3}^2 + 1 = \frac{k_1(k_1 + 1)}{2} + e_1 + 1$$

lo que demuestra el teorema (c.q.d.).

En términos de las componentes  $e_i$  del vector  $e$ , la expresión del teorema anterior toma la forma

$$I_{3,k}(e) = \frac{e_1^2 + 2e_1e_2 + e_2^2 + 3e_1 + e_2}{2} + 1$$

Los resultados obtenidos hasta ahora también nos dan las claves para construir la aplicación inversa del índice. Esto es, la aplicación que relacione a cada número natural  $i$ ,  $1 \leq i \leq \#C_k^p$ , con el elemento de  $C_k^p$  cuyo rango sea  $i$ : a esta aplicación la denotaremos

por  $I_{p,k}^{-1}(i)$ . Algunos valores son obvios, así por ejemplo  $I_{p,k}^{-1}(1) = (0, \dots, 0, k)$  pero su fórmula general es bastante compleja. Otro resultado también inmediato, a partir de las proposiciones anteriores, es el siguiente.

**Teorema 2.** *Sea  $i$  un número natural entre 1 y  $\#C_k^3$ , su imagen inversa por la aplicación índice,  $I_{3,k}^{-1}(i) = (a(i) \ b(i) \ c(i))$ , es tal que:*

- (i) Si  $i \leq \frac{1}{6}k(k+1)$  entonces  $c(i) > 0$ .
- (ii) Si  $\frac{1}{6}k(k+1) < i \leq \frac{1}{2}(k+1)(k+2) - 1$  entonces  $c(i) = 0$  y  $b(i) > 0$ .
- (iii) Si  $i = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$  entonces  $b(i) = c(i) = 0$  y  $a(i) = k$ .

*Demostración.* La proposición 3, aplicada para  $n = 1$ , implica que  $c(i) \geq 1$  si y sólo si  $i \leq \frac{1}{6}k(k+1)$ . Esto demuestra (i) y la cota inferior de (ii). El apartado (iii) se deduce inmediatamente de la proposición 1 y, por exclusión, queda demostrado (ii) (c.q.d.).

Para  $C_k^1$  la aplicación inversa del índice es trivial, pues  $C_k^1$  sólo contiene un elemento, y para  $C_k^2$  también es sencilla: si  $1 \leq i \leq \#C_k^2 = k+1$ ,  $I_{2,k}^{-1}(i) = (i-1, k-i+1)$ . La extensión a  $C_k^3$  se recoge en la siguiente Proposición.

**Proposición 4.** *Sea  $i$  un número natural tal que  $1 \leq i \leq \#C_k^3$ , entonces la tercera componente de  $e = I_{3,k}^{-1}(i)$ ,  $e_3$ , resulta ser:*

$$e_3 = k - \left\lfloor \frac{\sqrt{1+8i} - 1}{2} \right\rfloor + 1,$$

siendo  $[x]$  la parte entera por exceso de  $x$ .

*Demostración.* Sea  $f(x) = x(x+1)/2$ . Esa es la función de la proposición 3, con  $x = k - n + 1$ , que proporciona el rango del elemento máximo de  $C_{n,k}^3$ . Por tanto, todo elemento de  $C_k^3$  con tercera componente igual a  $n$  tendrá un rango  $i$  tal que  $f(k-n) < i \leq f(k-n+1)$ .

Como  $f(x)$  es una función monótona creciente sobre la semirrecta real positiva, las desigualdades anteriores se traducen a:

$$k - n < f^{-1}(i) \leq k - n + 1 \Rightarrow \lceil f^{-1}(i) \rceil = k - n + 1,$$

donde  $[.]$  representa la función parte entera por exceso. Es necesario considerar la parte entera por exceso, para que el resultado siga siendo válido aunque  $f^{-1}(i)$  sea ya

un número entero. La proposición queda demostrada al notar que  $f^{-1}(i) = \frac{\sqrt{1+8i}-1}{2}$  (c.q.d.).

Ya es posible calcular, de manera sencilla, la aplicación inversa del índice en el conjunto  $C_k^3$ , puesto que la proposición 4 proporciona directamente la componente  $e_3$  de  $e = I_{3,k}^{-1}(i)$  y sus otras dos componentes,  $(e_1, e_2)$ . De ahí que:

**Teorema 3.** Sea  $i$  un número natural entre 1 y  $\#C_k^3$ , su imagen inversa por la aplicación índice es:

$$I_{3,k}^{-1}(i) = \left( i - 1 - \frac{x^2 - x}{2}, \frac{x^2 + x}{2} - i, k - x + 1 \right),$$

siendo

$$x = \left\lceil \frac{\sqrt{1+8i}-1}{2} \right\rceil$$

y en donde  $\lceil x \rceil$  representa la parte entera por exceso.)

*Demostración.* Sea  $i^* = i - \#C_{e_3+1,k}^3$  si  $e_3 < k$  o  $i^* = i$  si  $e_3 = k$ , siendo  $e_3$  el valor obtenido por la proposición 4. El valor de  $i^*$  es el rango que ocupa el vector formado por las dos primeras componentes de  $e = I_{3,k}^{-1}(i)$ ,  $(e_1, e_2)$ , entre todos los elementos de  $C_k^3$  cuya tercera componente es igual a  $e_3$ . Por tanto,

$$(e_1, e_2) = I_{2,k-e_3}^{-1}(i)^* = (i^* - 1, k - e_3 - i^* + 1)$$

y basta sustituir en  $i^*$  el valor de  $\#C_{e_3+1,k}^3$  y el teorema queda demostrado (c.q.d.).

Se define la siguiente transformación biyectiva del índice del elemento  $e \in C_k^p$ ,  $I_{p,k}(e)$ , que denotaremos por  $ID_{p,k}(e)$  y llamaremos índice de desarrollo del elemento  $e$ :

$$ID_{p,k}(e) = I_{p,k}(e) - 1$$

que, por misma construcción, es una biyección entre el conjunto  $C_k^p$  y el subconjunto de números enteros  $\{i \in \mathbb{Z}, \text{ tal que } 0 \leq i \leq \#C_k^p - 1\}$ , siendo  $\#C_k^p$  el cardinal del conjunto  $C_k^p$ . De los resultados anteriores para  $I_{p,k}(e)$ , son inmediatos los siguientes válidos para  $ID_{p,k}(e)$ :

**Teorema 4.**  $0 \leq ID_{p,k}(e) \leq \frac{1}{2}k(k+3)$

*Demostración.* Basta calcular

$$\min(ID_{p,k}(e)) = \min(I_{p,k}(e) - 1) = 0$$

$$\max(ID_{p,k}(e)) = \max(I_{p,k}(e) - 1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) - 1 = \frac{1}{2}k(k+3) \quad (\text{c.q.d.})$$

**Teorema 5.** Sea  $e = (e_1, e_2, e_3)$  un elemento cualquiera de  $C_k^3$ . Si definimos  $k_1 = k - e_3 = e_1 + e_2$  entonces:

$$ID_{3,k}(e) = \frac{1}{2}(k_1^2 + k_1) + e_1$$

**Teorema 6.** Sea  $i$  un número natural entre 0 y  $\#C_k^3 - 1$ , su imagen inversa por la aplicación índice de desarrollo,  $ID_{3,k}^{-1}(i) = (a(i) \ b(i) \ c(i))$ , es tal que:

(i) Si  $i \leq \frac{1}{6}k(k+1) - 1$  entonces  $c(i) > 0$ .

(ii) Si  $\frac{1}{6}k(k+1) - 1 < i \leq \frac{1}{2}(k+1)(k+2) - 2$  entonces  $c(i) = 0$  y  $b(i) > 0$ .

(iii) Si  $i = \frac{1}{2}k(k+3)$  entonces  $b(i) = c(i) = 0$  y  $a(i) = k$ .

**Teorema 7.** Sea  $i$  un número natural entre 0 y  $\#C_k^3 - 1$ , su imagen inversa por la aplicación índice es:

$$ID_{3,k}^{-1}(i) = \left( i - \frac{x^2 - x}{2}, \frac{x^2 + x}{2} - i - 1, k - x + 1 \right),$$

siendo

$$x = \left[ \frac{\sqrt{9 + 8i} - 1}{2} \right]$$

y en donde  $[x]$  representa la parte entera por exceso.